Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Markus Schmidt
Sylva Scholz

Freiburg i. Br., den 10. Mai 2006

APPROXIMATIONS- UND ONLINE-ALGORITHMEN SS 06

Übung 2

Abgabe am 24. Mai 2006 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Paging (3 + 3 Punkte)
Gegeben sei das modifizierte Paging-Problem, in welchem die Größe des schnellen Speichers eines Online-Algorithmus k und die eines optimalen Offline-Algorithmus $h \leq k$ beträgt. Zeigen Sie, dass

a) für jeden c-kompetitiven deterministischen Online-Algorithmus $c \geq \frac{k}{k-h+1}$ ist.

b) FIFO den kompetitiven Faktor $\frac{k}{k-h+1}$ besitzt.

Aufgabe 2: Selbstorganisierende Listen (6 Punkte)
Beweisen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine beliebig lange Anfragesequenz σ existiert, so dass FC einen kompetitiven Faktor $c \geq \frac{n+1}{2} - \epsilon$, mit n als der Länge der Liste, besitzt.

Aufgabe 3: Randomisiertes Ski-Problem (6 Punkte)
Gegeben sei das Ski-Problem mit Leihkosten 1 und Kaufkosten $B \in \mathbb{N}$, $2|B$. Für einen randomisierten Online-Algorithmus A bezeichne p_i die Wahrscheinlichkeit, dass am i-ten Tag die Ski gekauft werden. Zeigen Sie für das Ski-Ausleihe-Problem, dass für jeden c-kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus A gegen den blinden Gegner $c \geq \frac{6}{5}$ gilt.
Hinweis: Untersuchen Sie getrennt die Fälle $\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}B} p_i \geq \frac{1}{5}$ und $\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}B} p_i < \frac{1}{5}$. Geben Sie in jedem Fall eine Länge der Eingabe an, durch welche der kompetitive Faktor so hoch wie möglich wird.

Aufgabe 4: Randomisierung bei selbstorganisierenden Listen (6 Punkte)
Wir betrachten die Erweiterung SEVEN-DOWN des BIT-Algorithmus aus der Vorlesung:

> Sei $S = \{1, 3, 5\}$. Für jedes Listenelement x wird ein Zustandswert $s(x) \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ gehalten, der anfangs unabhängig und zufällig gemäß Gleichverteilung mit einem Wert aus $\{0, 1, \ldots, 6\}$ initialisiert wird. Bei jeder Anfrage an x wird $s(x)$ um 1 gesenkt; $s_{neu}(x) = s_{alt}(x) - 1 \pmod 7$. Gilt $s_{neu}(x) \in S$, so wird x an den Kopf der Liste bewegt, andernfalls wird die Listenposition nicht geändert.

Zeigen Sie, dass SEVEN-DOWN $\frac{85}{49}$-kompetitiv gegen den blinden Gegner ist. Verwenden Sie hierbei die Ideen aus dem Beweis von BIT.