Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Markus Schmidt
Sylva Scholz

Freiburg i. Br., den 12. Juli 2006

APPROXIMATIONS- UND ONLINE-ALGORITHMEN SS 06

Übung 6

Abgabe am 26. Juli 2006 (in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Rucksackproblem (2 + 4 Punkte)
Gegeben sei das in der Vorlesung vorgestellte Rucksackproblem.

a) Betrachtet wird der Algorithmus GREEDY:

Eingabe: $w_1, \ldots, w_n, g_1, \ldots, g_n, b$
    Sei durch Sortierung ohne Einschränkung $\frac{w_1}{g_1} \geq \frac{w_2}{g_2} \geq \ldots \geq \frac{w_n}{g_n}$;
    $I := \emptyset$;   // I ist die Menge der gewählten Gegenstände.
    $g(I) := 0$;
    For $i = 1$ **to** n **do**
        If $g(I) + g_i \leq b$ **then** $I := I \cup \{i\}$;
Ausgabe: I, $w(I)$

Zeigen Sie, dass GREEDY unbeschränkt schlecht werden kann.

b) Betrachtet wird nun der verbesserte Algorithmus GREEDY*: Sei $w(I)$ der Wert des Rucksacks nach GREEDY aus Aufgabenteil a). Ist $w(I) \geq \max\{w_i : i = 1, \ldots, n\}$ werden die Gegenstände aus I von GREEDY* gewählt, sonst der Gegenstand mit Nutzen $\max\{w_i : i = 1, \ldots, n\}$. Für den Wert des Rucksacks nach GREEDY* gilt dann $w^* = \max\{w(I), \max\{w_i : i = 1, \ldots, n\}\}$.
Zeigen Sie, dass GREEDY* $\frac{1}{2}$-approximativ ist.

Aufgabe 2: Steinerbäume (4 + 2 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit nichtnegativen Kantengewichten, dessen Knoten aus zwei Mengen *Terminals* und *Steiner* bestehen. Ein *Steinerbaum* ist ein Baum, der alle Knoten aus der Menge Terminals und eine beliebige Teilmenge von Knoten aus der Menge Steiner enthält. Das *Steinerbaum Problem* besteht darin, den Steinerbaum mit minimalem Kantengewicht zu bestimmen. Wir betrachten das *Metrische Steinerbaum Problem*, für welches gilt, dass G vollständig ist und die Kantengewichte der Dreiecksungleichung gehorchen.

a) Seien OPT das Gewicht des minimalen Steinerbaums und T das Gewicht eines minimalen Spannbaums auf der Terminal-Menge. Beweisen Sie, dass $\mathrm{T} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie den Eulerkreis, der durch Verdopplung der Kanten des optimalen Steinerbaums entsteht.)

b) Zeigen Sie, dass diese Ungleichung scharf ist.

Aufgabe 3: Vertex Cover (6 Punkte)
Betrachtet wird das Set Cover Problem aus der Vorlesung. Wir definieren die *Häufigkeit* eines Elementes $u \in U$ als die Anzahl der Mengen aus S, in denen es enthalten ist. Sei f die Häufigkeit des am häufigsten vorkommenden Elements. Zeigen Sie, dass das Set Cover Problem für Instanzen mit $f = 2$ äquivalent zum Vertex Cover Problem ist.

Aufgabe 4: Lineare Programmierung (6 Punkte)
Formulieren Sie das Bin Packing Problem, in welchem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, Objekte i mit Gewicht $w_i \in (0, 1]$ in eine minimale Anzahl von Kisten gepackt werden sollen, als ein lineares Programm.
(Hinweis: Es stehen maximal n Kisten zur Verfügung.)