IIF
INSTITUT FÜR
INFORMATIK
FREIBURG

Vorlesung Informatik 2
Algorithmen und Datenstrukturen

(23 – Bruder-Bäume, B-Bäume)

Prof. Dr. Susanne Albers

Balancierte Bäume

Eine Klasse von binären Suchbäumen ist balanciert, wenn jede der drei Wörterbuchoperationen

Suchen
Einfügen
Entfernen

von Schlüsseln für einen Baum mit n Schlüsseln stets (im worst case) in O(log n) Schritten ausführbar ist.

Mögliche Balancierungsbedingungen:

Höhenbedingung →AVL-Bäume
Gewichtsbedingung → BB[α]-Bäume
Strukturbedingungen → Bruder-, 2-3-, a-b-, B-Bäume

Ziel: Höhe eines Baumes mit n Schlüsseln bleibt stets in O(log n).

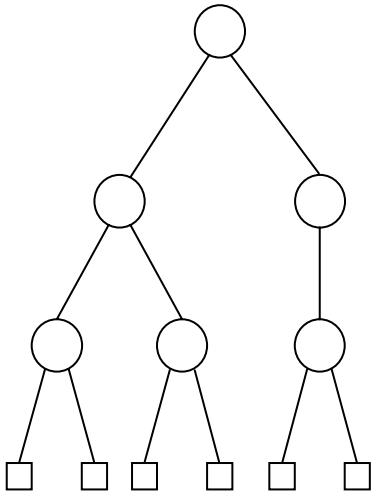
Bruder-Bäume

Idee:

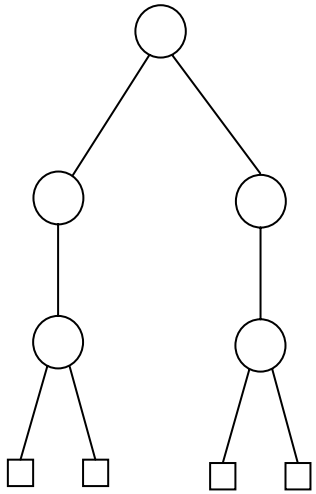
- Innere Knoten dürfen auch nur einen Nachfolger haben.
- Solche Knoten heißen unäre Knoten.
- Durch Einfügen der unären Knoten erreicht man, dass alle Blätter dieselbe Tiefe haben.
- Zu viele unäre Knoten führen jedoch zu entarteten Bäumen mit großer Höhe und wenigen Blättern.
- Man verhindert das Entarten, indem man eine Bedingung an so genannte Bruderknoten stellt.
- Zwei Knoten heißen Brüder, wenn sie denselben Vorgänger haben.

Definition von Bruder-Bäumen

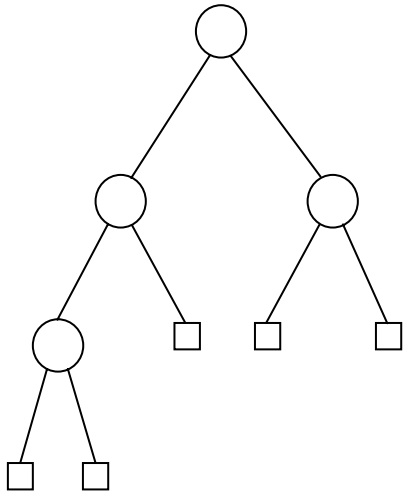
Definition: Ein binärer Baum heißt ein Bruder-Baum, wenn jeder innere Knoten einen oder zwei Nachfolger hat, jeder unäre Knoten einen binären Bruder hat und alle Blätter dieselbe Tiefe haben.



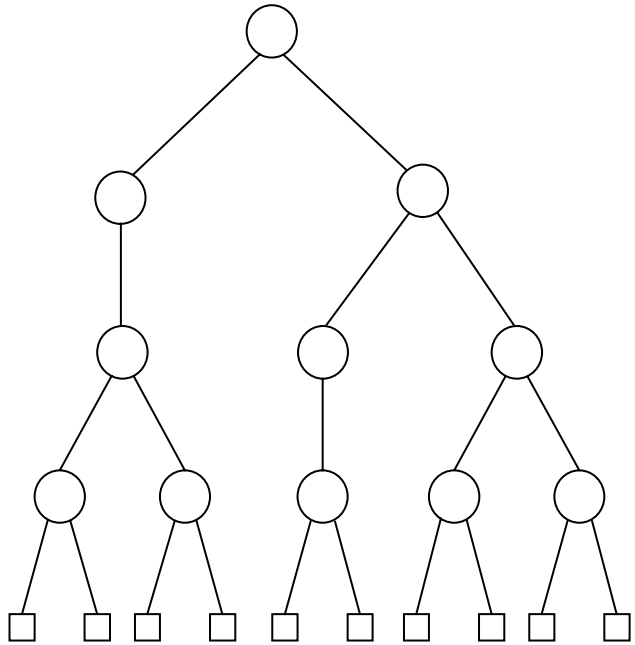
Bruder–Baum



kein Bruder-Baum



kein Bruder-Baum



Bruder-Baum

Beobachtungen

- Ist ein Knoten *p* der einzige Nachfolger seines Vorgängers, so ist *p* ein Blatt oder binär. Von zwei Nachfolgern eines binären Knotens kann höchstens einer unär sein.
- Offensichtlich ist die Anzahl der Blätter eines Bruder-Baumes stets um 1 größer als die Anzahl der binären (inneren) Knoten.
- Ebenso wie für AVL-Bäume gilt auch für Bruder-Bäume: Ein Bruder-Baum mit Höhe *h* hat wenigstens F_{h+2} Blätter.
- Entsprechend hat ein Bruder-Baum mit *n* Blättern und (*n* -1) inneren Knoten eine Höhe $h \leq 1.44 \ldots \log_2 n$.

Bruder-Bäume als Suchbäume

Eine Möglichkeit Bruder-Bäume als Suchbäume zu verwenden sind die so genannten 1-2-Bruder-Bäume:

- Nur binäre Knoten enthalten Schlüssel (unäre nicht).
- Für die binären Knoten gilt die Suchbaumeigenschaft.

Einschub: *a*-*b*-Bäume

Definition: Ein *a*-*b*-Baum ist ein Baum mit folgenden Eigenschaften:

1. Jeder innere Knoten hat mindestens a und höchstens b Nachfolger.
2. Alle Blätter haben die gleiche Tiefe.
3. Jeder Knoten mit *i* Nachfolgern enthält genau *i* - 1 Schlüssel.

Bemerkungen:

1. Bruder-Bäume sind spezielle 1-2-Bäume.
2. Die später behandelten B-Bäume sind $\lceil m/2 \rceil$-m-Bäume ($m > 2$).

Operationen auf Bruder-Bäumen (1)

Suchen: Im Prinzip analog zu binären Suchbäumen. Stößt man auf einen unären Knoten, setzt man die Suche bei dessen Nachfolger fort.

Einfügen: Beim Einfügen geht man anders vor als bei Suchbäumen:

- Da alle Blätter die gleiche Höhe haben, kann man einen neuen Knoten nicht einfach anhängen.
- Stattdessen versucht man, unäre in binäre Knoten umzuwandeln.
- Gelingt dies nicht, geht man stufenweise nach oben und versucht dort, durch geeignete Transformationen den Knoten einzufügen.
- Im schlimmsten Fall kommt man bis zur Wurzel und muss dann einen neuen Knoten zur Wurzel machen.

Operationen auf Bruder-Bäumen (2)

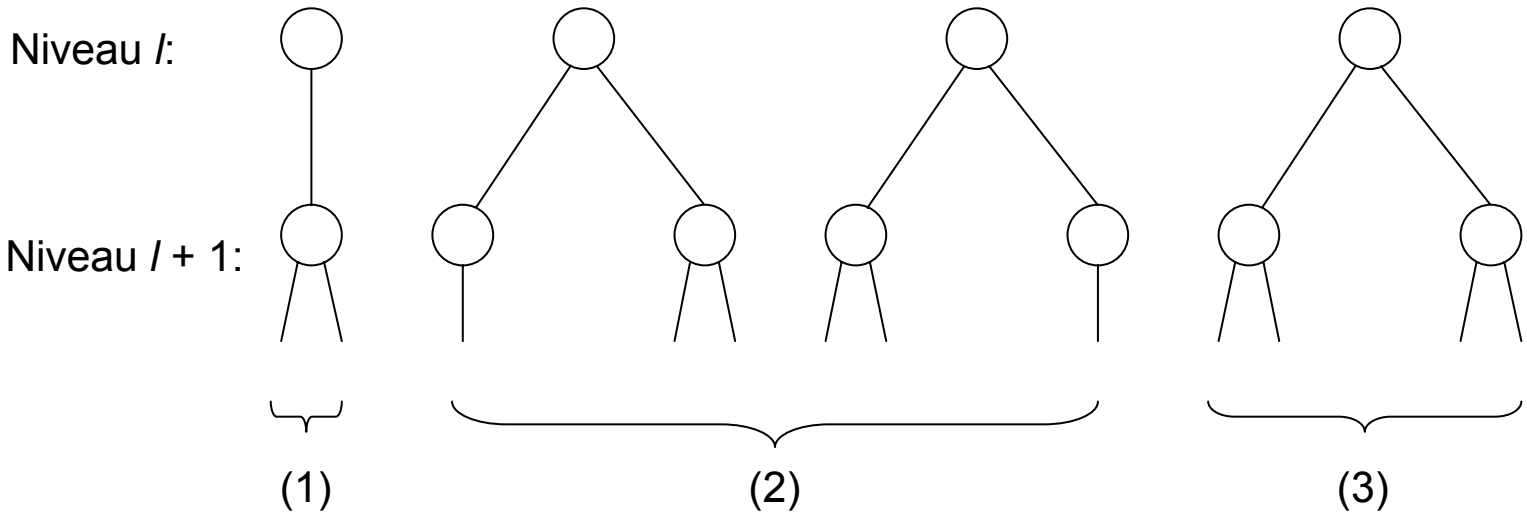
- Bruder-Bäume wachsen demnach an der Wurzel und nicht an den Blättern.

Löschen: Beim Löschen geht man ähnlich vor wie bei binären Suchbäumen:

- Gegebenenfalls muss man das Löschen auf das Löschen des symmetrischen Nachfolgers reduzieren.
- Ausgehend von dem zu löschenden Knoten geht man dann rekursiv entlang des Suchpfads (ähnlich wie bei AVL-Bäumen) im Baum nach oben, um die Bruder-Baum-Eigenschaften wiederherzustellen.
- Dabei muss man schlimmstenfalls bis zur Wurzel laufen.
- Damit kann man auch bei Bruderbäumen die Operationen Suchen, Einfügen und Löschen in Zeit O(log n) durchführen.

Analytische Betrachtungen

- 1-2-Bruder-Bäume enthalten i.Allg. unäre Knoten, die keine Schlüssel speichern.
- Wie viele können das sein?
- Für aufeinander folgende Levels sind lediglich folgende Konfigurationen möglich:



Wieviele Schlüssel sind in einem 1-2-Bruder-Baum?

- Für jeden unären Knoten auf Niveau *l* muss es einen binären Bruder auf demselben Niveau geben.
- Zulässige Kombinationen der Konfigurationen sind demnach:

Konfiguration	*U*
(2)	2/3
(3)	3/3
(1) und eine Konfig. aus (2)	3/5
(1) und (3)	4/5

mit

$$U = \frac{\text{Anzahl von binären Knoten auf Niveau } l \text{ und } l+1}{\text{Anzahl Knoten insgesamt auf Niveau } l \text{ und } l+1}$$

- Folglich sind wenigstens 3/5 aller Knoten in einem 1-2-Bruder-Baum binär und enthalten Schlüssel.

Konsequenzen

- Offensichtlich werden beim Einfügen von *n* Schlüsseln in einen anfangs leeren Teilbaum höchstens 5/3 * *n* Knoten erzeugt.
- Man kann nachweisen, dass bei der Einfügung eines neuen Knoten beim rekursiven Entlanglaufen des Suchpfads stets gestoppt wird, wenn kein neuer Knoten erzeugt wird.
- Also ist die durchschnittliche Anzahl der notwendigen Transformationen bei einer Einfügung in einen 1-2-Bruder-Baum konstant.
- Für AVL-Bäume ist die Herleitung einer entsprechenden Aussage wesentlich schwieriger.
- Zwar stoppt die Methode *upin* nach einer Rotation oder Doppelrotation, allerdings ist nicht klar, wie weit man nach oben laufen muss.

B-Bäume

Motivation:

- Bisher waren wir davon ausgegangen, dass die durch Bäume strukturierten Daten im Hauptspeicher Platz finden.
- In der Praxis (z.B. in Datenbanken) ist man jedoch häufig gezwungen, die Daten und auch die Schlüssel auf externen Medien (heute in der Regel Festplatten) abzulegen.
- Ziel von B-Bäumen ist, die Anzahl der Zugriffe auf das externe Medium zu reduzieren.

Definition der B-Bäume

Definition: Ein Baum heißt B-Baum der Ordnung *m*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind. (Achtung: m > 2)

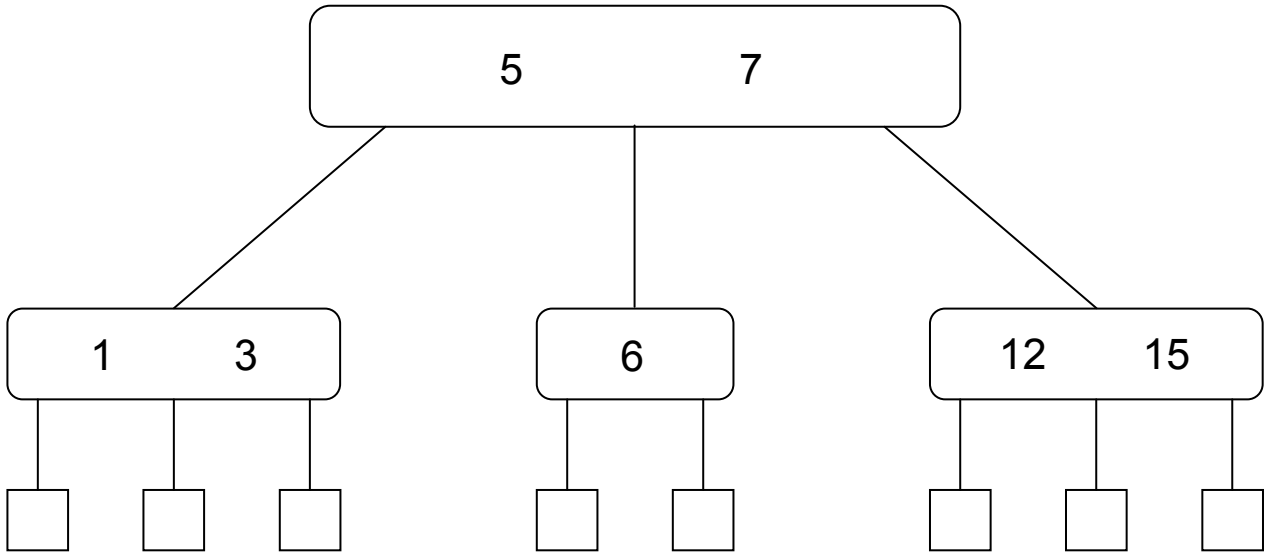
1. Jeder Knoten mit Ausnahme der Wurzel und der Blätter enthält mindestens $\lceil m/2 \rceil - 1$ Daten. Jeder Knoten enthält höchstens m - 1 Daten. Die Daten sind sortiert.

2. Knoten mit *k* Daten $x_1, \ldots, x_k$ haben $k + 1$ Referenzen auf Teilbäume mit Schlüsseln aus den Mengen
   $\{-\infty,\ldots,x_1-1\}, \{x_1+1,\ldots,x_2-1\}, \ldots,\{x_{k-1}+1,\ldots,x_k-1\}, \{x_k+1,\ldots,\infty\}$

3. Die Referenzen, die einen Knoten verlassen, sind entweder alle null-Referenzen (Blätter) oder alle Referenzen auf Knoten.

4. Alle Blätter haben gleiche Tiefe.

Ein Beispiel



Hinweis: Im Kontext von B-Bäumen sind null-Referenzen durch □ dargestellt.

Beobachtung: Dieser Baum hat 7 Schlüssel und 8 null-Referenzen.

Anzahl der null-Referenzen (Blätter)

Behauptung: Die Anzahl der null-Referenzen ist stets um eins größer als die Anzahl der Schlüssel in einem B-Baum.

Beweis:

Induktionsverankerung: Der leere B-Baum enthält eine null-Referenz aber keinen Knoten.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für alle B-Bäume mit höchstens n - 1 Schlüsseln.

Induktionsschluss: Sei p die Wurzel eines B-Baums mit n Schlüsseln. Angenommen p hat k - 1 Schlüssel und k Teilbäume mit $l_1, \ldots, l_k$ Schlüsseln. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Summe der null-Referenzen in den Teilbäumen genau

$$\sum_{i=1}^{k}(l_i + 1) = 1 + (k - 1) + \sum_{i=1}^{k} l_i = 1 + n$$

Höhe eines B-Baums

- Um die Anzahl der in einem B-Baum mit Höhe *h* gespeicherten Schlüssel abzuschätzen, genügt es also, die Anzahl der null-Referenzen zu bestimmen.
- Offensichtlich ist die Höhe maximal, wenn in der Wurzel lediglich ein und in jedem weiteren Knoten genau $\lceil m/2 \rceil - 1$ Schlüssel enthalten sind.
- Die minimale Anzahl von null-Referenzen ist somit $N_{min} = 2*\lceil m/2 \rceil^{h-1}$
- Ist ein B-Baum mit *N* Schlüsseln und Höhe *h* gegeben, so hat er *(N* + 1) null-Referenzen und es muss gelten:

$N_{min} = 2*\lceil m/2 \rceil^{h-1} \leq (N + 1)$, also $h \leq 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil} ((N + 1)/2)$

Konsequenzen

- B-Bäume haben demnach auch die für balancierte Bäume typische Eigenschaft, dass die Höhe logarithmisch beschränkt ist in der Anzahl der gespeicherten Schlüssel.
- Für $m = 199$ haben B-Bäume mit 1.999.999 Schlüsseln höchstens die Höhe 4.

Suchen in einem B-Baum

Um einen Schlüssel in einem B-Baum zu suchen, verfahren wir wie folgt:

1. Ausgehend von der Wurzel prüfen wir, ob der gesuchte Schlüssel sich in dem gerade betrachteten Knoten befindet.

2. Ist das nicht der Fall, bestimmen wir den kleinsten Schlüssel der größer als der gesuchte ist.

   Existiert dieser Schlüssel, gehen wir zum Nachfolger-Knoten links von diesem Schlüssel über.

   Existiert der Schlüssel nicht, gehen wir zum letzten Nachfolger-Knoten über.

3. Wenn wir bei einer *null*-Referenz landen, ist die Suche erfolglos.

Suche innerhalb eines Knotens

Hier sind prinzipiell verschiedene Verfahren denkbar:

- lineare Suche
- binäre Suche
- . . .

Allerdings beeinträchtigt die Suche innerhalb eines Knotens die Rechenzeit eher wenig, weil diese hauptsächlich durch die Anzahl der Zugriffe auf den Hintergrundspeicher (Festplatte) beeinflusst wird.

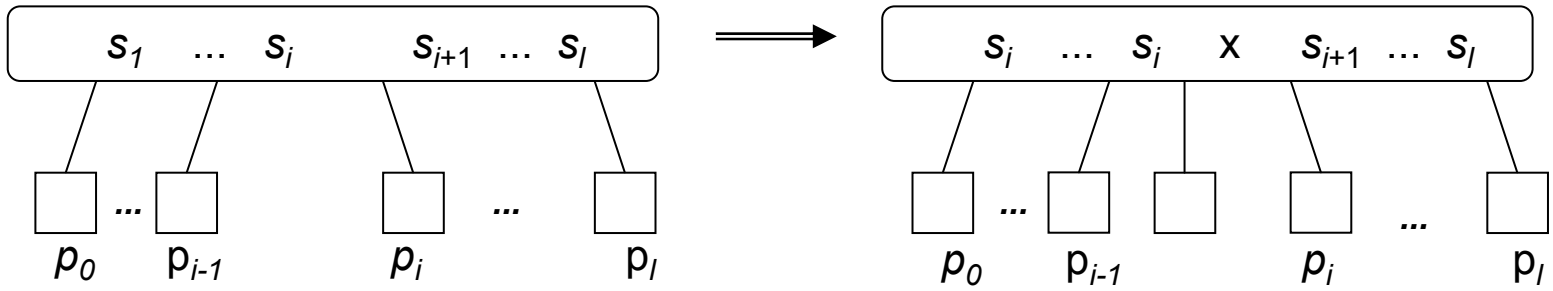
Einfügen eines Schlüssels in den B-Baum

- Zunächst suchen wir die Stelle, an der der Schlüssel x im Baum vorkommen sollte.
- Ist die Suche erfolglos, endet sie in einem Blatt mit Vater p an der erwarteten Position von x.
- Seien s_1, ... , s_l die in p gespeicherten Schlüssel.
- Wir unterscheiden 2 Fälle:

  1. Knoten p ist noch nicht voll, d.h. $l < m - 1$.
  2. Knoten p ist voll, d.h. $l = m - 1$.

Fall 1: Knoten p ist noch nicht voll

- Wir fügen *x* in *p* zwischen dem Schlüsselpaar (s_i; s_{i+1}) ein, für das $s_i < x < s_{i+1}$. Ist *x* kleiner als s_0 oder größer als s_l, so fügen wir *x* am Anfang oder am Ende in p ein.
- Dann setzen wir den Wert der ebenfalls einzufügenden Nachfolgereferenz auf *null*, d.h. wir fügen auch ein Blatt ein.

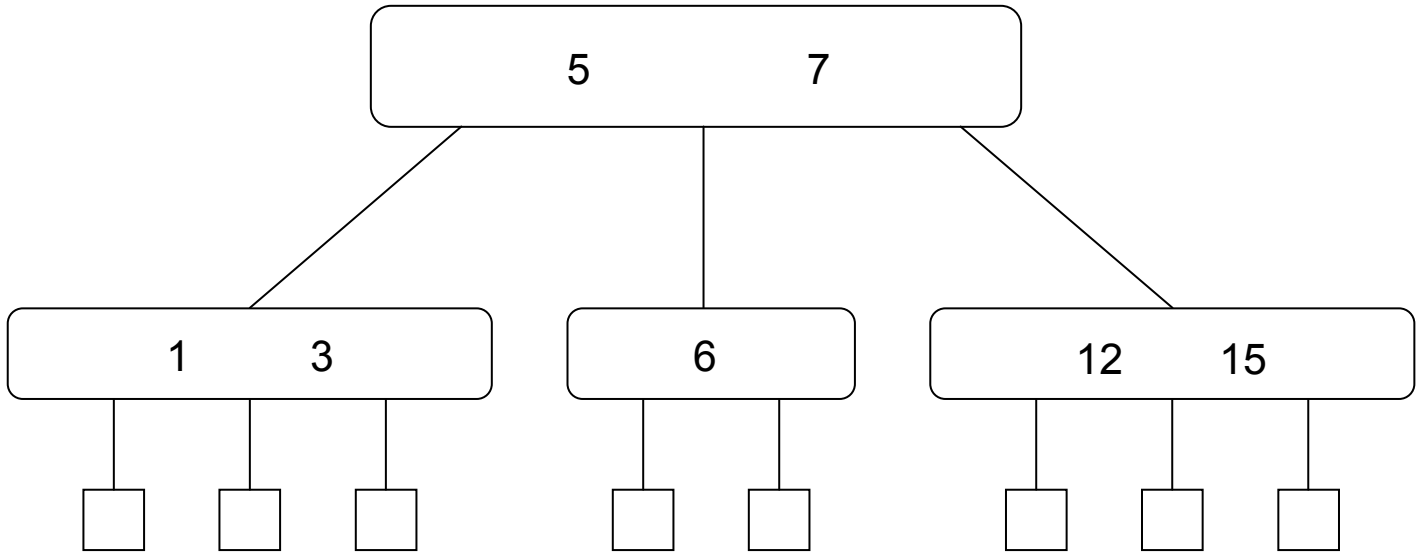


Fall 2: Knoten p ist voll und enthält genau *m* -1 Schlüssel

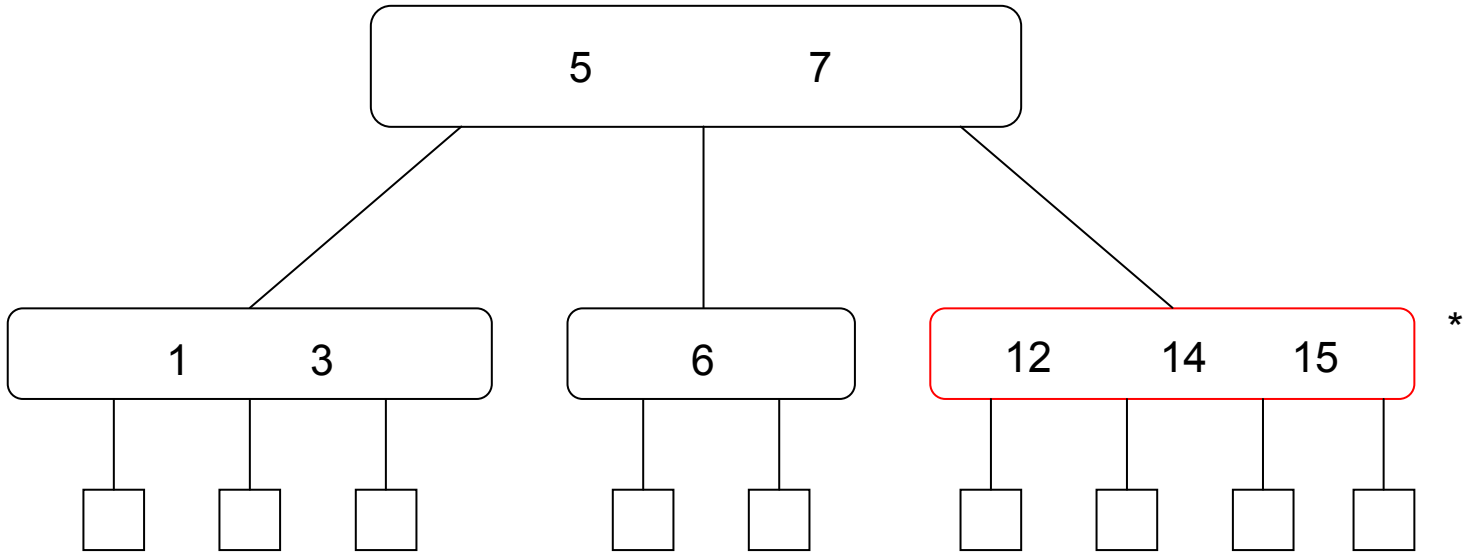
- Wir ordnen *x* in die Folge der Schlüssel entsprechend der Ordnung ein.
- Seien $k_{1,} \ldots, k_m$ die Schlüssel in *p* in aufsteigender Reihenfolge in *p*.
- Wir erzeugen nun einen neuen Knoten *q* und verteilen die m Schlüssel so auf *p* und *q*, dass *p* die Schlüssel $k_{1,} \ldots, k_{\lceil m/2 \rceil -1}$ und *q* die Schlüssel $k_{\lceil m/2 \rceil +1}, \ldots, k_m$ enthält.
- Der Schlüssel $k_{\lceil m/2 \rceil}$ wandert in den Vorgänger φp von *p*.
- Wenn *j* die Position von $k_{\lceil m/2 \rceil}$ in φp ist, wird p_{j-1} eine Referenz auf *p* und p_j eine Referenz auf *q*.
- Dieses Verfahren wird rekursiv fortgesetzt, bis wir an der Wurzel angelangt sind und ggf. eine neue Wurzel mit einem Schlüssel erzeugt haben.

Ein Beispiel (2-3-Baum)

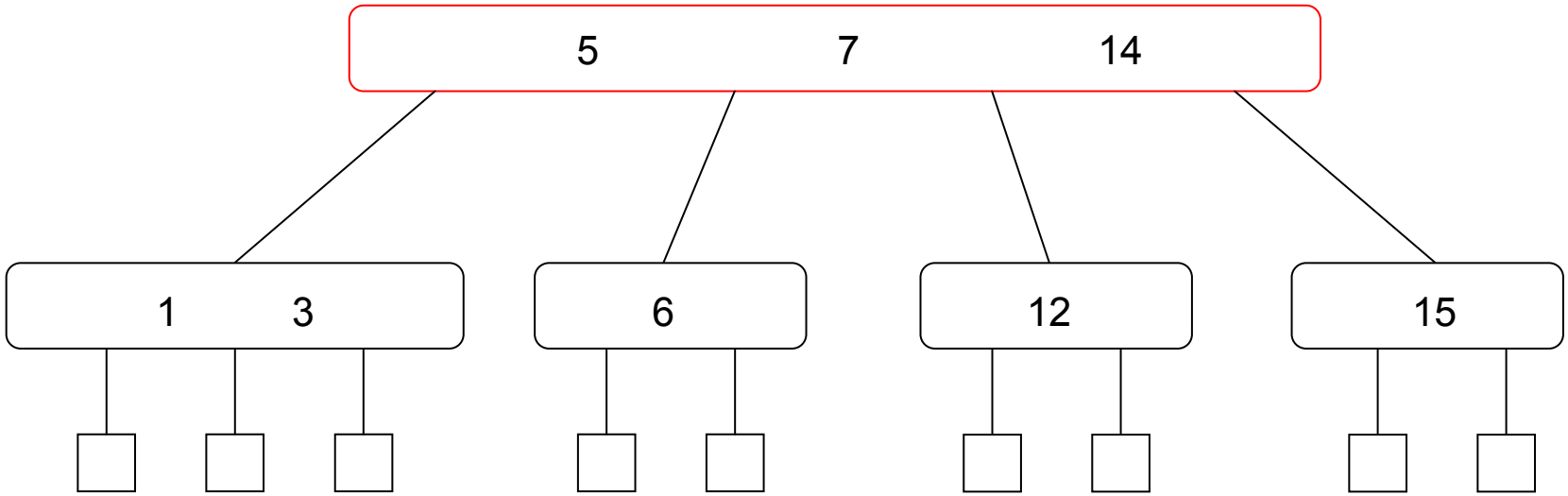
Ausgangssituation:



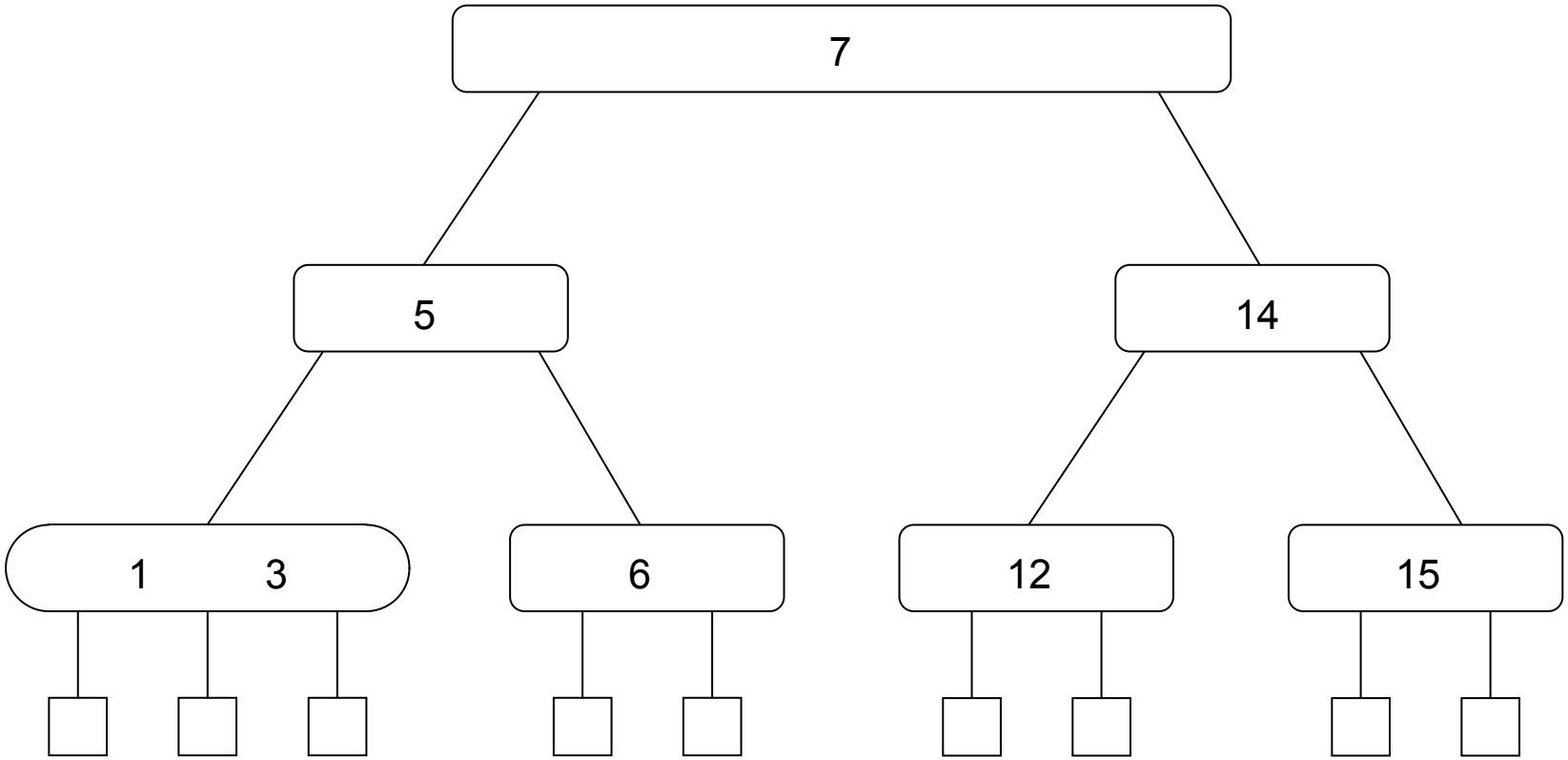
Einfügen von 14



Overflow: Spalten eines Knoten



Spalten eines Knoten und neue Wurzel



Löschen von Schlüsseln aus einem B-Baum

- Das Löschen von Schlüsseln ist leider wieder komplizierter als das Einfügen.
- Beim Entfernen unterscheiden wir, ob der zu löschende Schlüssel *x* aus einem Knoten gelöscht werden soll, dessen sämtliche Nachfolger Blätter sind, oder aus einem Knoten mit inneren Knoten als Nachfolger gelöscht werden soll.
- Offensichtlich besteht das Problem, dass beim Löschen eines Schlüssels aus einem Knoten ein Underflow auftreten kann, d.h. dass in dem Knoten zu wenig Schlüssel vorhanden sind.

Löschen aus einem Knoten oberhalb der Blätter

- Ein Knoten, der nur Blätter als Söhne hat, hat die Struktur

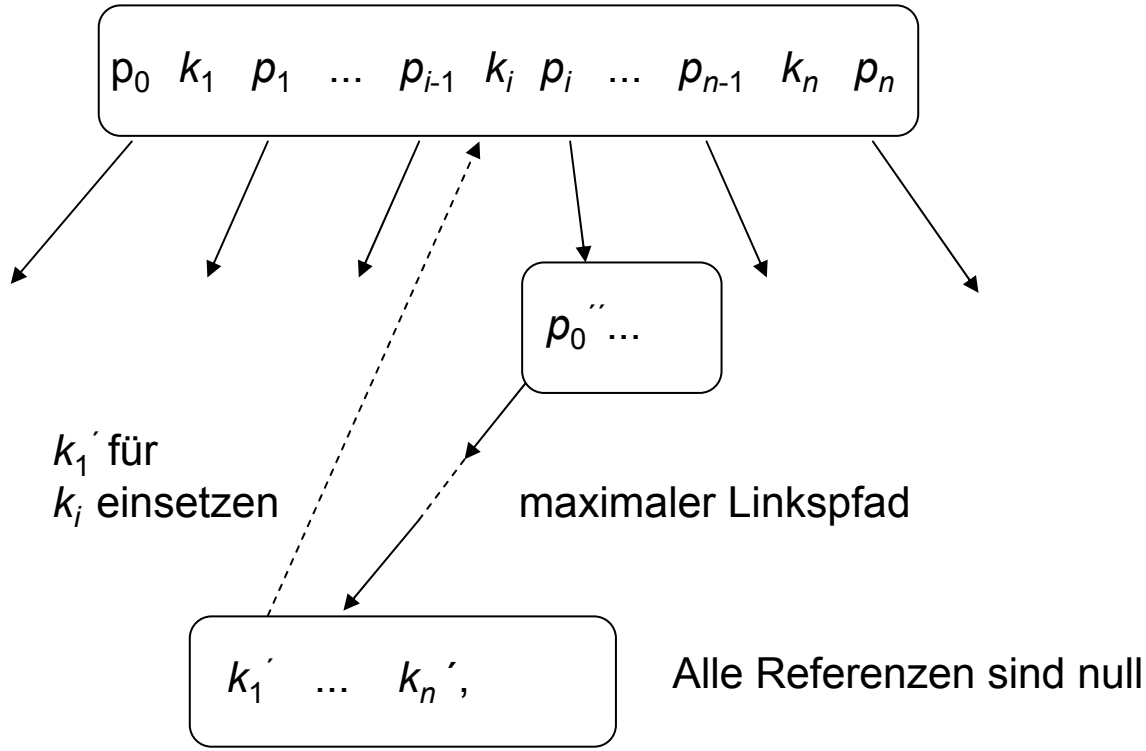
$$null, k_1, \ldots, null, k_i, null, \ldots, k_l, null$$

- Wenn nun das Element mit Schlüssel k_i entfernt werden soll, so streicht man einfach k_i und die darauf folgende null-Referenz.
- Ein Underflow tritt auf, falls $l = \lceil m/2 \rceil - 1$ war.

Entfernen aus einem inneren Knoten

- Im Unterschied zum Löschen aus einem Knoten unmittelbar oberhalb der Blätter haben alle Referenzen einen Wert ungleich *null*.
- Insbesondere existiert ein Nachfolger p_i rechts von dem zu löschenden Schlüssel k_i.
- Demnach ist der symmetrische (oder inorder) Nachfolger von k_i im durch p_i referenzierten Teilbaum zu finden (analog zu binären Suchbäumen).
- Wegen der Ausgeglichenheit muss der symmetrische Nachfolger von k_i in einem Knoten unmittelbar oberhalb der Blätter sein.
- Wir ersetzen nun k_i durch seinen symmetrischen Nachfolger und löschen k_i aus dem Blatt (erneut Fall 1).

Reduktion des Entfernens auf symmetrischen NF



Behandlung des Underflows

- Bei der Behandlung des Underflows sind wieder verschiedene Fälle möglich.
- Wir benötigen zwei Operationen:

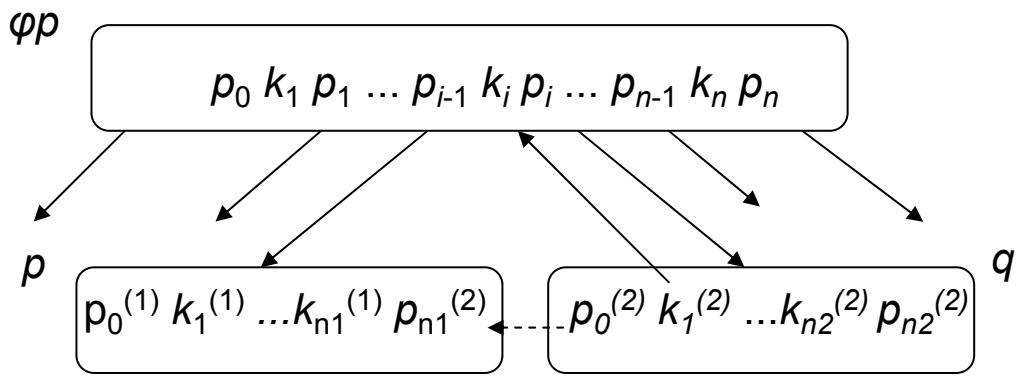
  1. das Ausgleichen (zwischen zwei Bruder-Knoten)

  2. das Verschmelzen (von zwei Bruder-Knoten)

Ausgleich zwischen Bruder-Knoten

- Zwischen zwei Brüdern p und q wird ausgeglichen, wenn bei p ein Underflow eintritt und q mehr als $\lceil m/2 \rceil - 1$ Schlüssel enthält.
- Idee der Austauschoperation ist, aus *q* einen Schlüssel zu entfernen und diesen in den Vorgänger φ*p* (von *p* und *q*) zu einzufügen. Aus φ*p* entnehmen wir dann einen Schlüssel, den wir in *p* einfügen.
- Dies erfolgt so, dass die B-Baum-Eigenschaft erhalten bleibt.
- Da das Problem symmetrisch ist, nehmen wir an, dass *p* linker Bruder von *q* ist.

Die Ausgleichsoperation

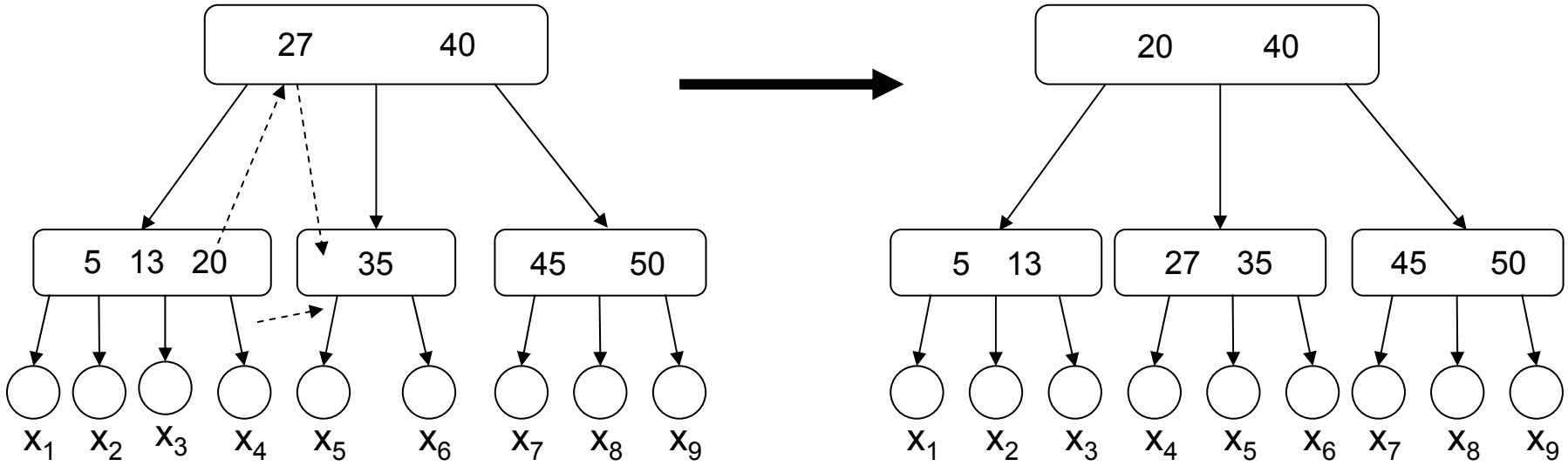


1. k_i wird größter Schlüssel in Knoten p.
2. $p_0^{(2)}$ wird letzte Referenz in Knoten p.
3. k_i wird in φp durch $k_1^{(2)}$ aus q ersetzt.

Hinweis: Der Baum hat anschließend wieder die B-Baum-Eigenschaft.

Ein Beispiel

3-6-Baum mit Underflow im zweiten Nachfolger der Wurzel:



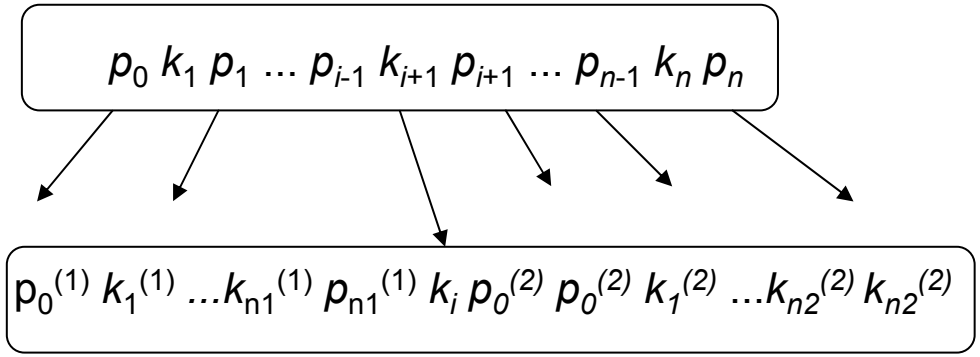
Das Verschmelzen von Bruder-Knoten

- Ein Knoten *p* wird mit einem seiner Brüder verschmolzen, wenn bei *p* ein Underflow eintritt und kein direkter Bruder von *p* mehr als $\lceil m/2 \rceil - 1$ Schlüssel enthält.
- Idee der Verschmelzungsoperation ist, aus *p* und seinem Bruder *q* einen neuen Knoten zu erzeugen. Zwischen die Schlüssel von *p* und *q* kommt jedoch der entsprechende Schlüssel aus dem Vorgängerknoten φp.
- Danach hat der neue Knoten

$$\lceil m/2 \rceil - 2 + \lceil m/2 \rceil - 1 + 1 = 2 \lceil m/2 \rceil - 2 \leq m - 1$$

  Knoten.
- Allerdings haben wir aus φp einen Knoten entnommen, so dass dort ggf. ein Underflow eintreten kann.
- Da das Problem symmetrisch ist, nehmen wir erneut an, dass *p* linker Bruder von *q* ist.

Die Verschmelzungsoperation



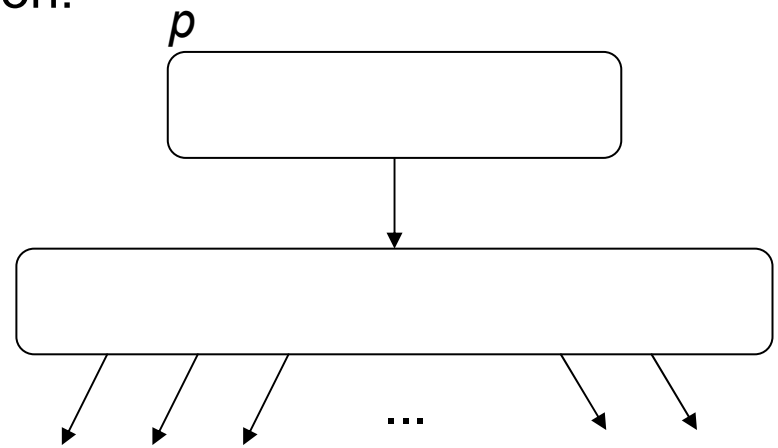
mit $n_1 = \lceil m/2 \rceil - 2$ und $n_2 = \lceil m/2 \rceil - 1$

Das Vorgehen:

- k_i aus φp wandert in den neuen Knoten.
- Der neue Knoten wird Nachfolger p_i -1 in φp.
- p_i wird aus φp gelöscht.

Spezialfall Wurzel

- Die Verschmelzung wird rekursiv nach oben fortgesetzt, bis wir ggf. bei der Wurzel ankommen.
- Wenn wir dann aus der Wurzel den letzten Schlüssel entfernen, haben wir folgende Situation:



- Da die Wurzel keinen Schlüssel mehr enthält, können wir sie einfach löschen und ihren einzigen Nachfolger als Wurzel verwenden.
- Die Höhe des B-Baums ist dann um 1 gesunken.

Ein Beispiel für eine Verschmelzung

3-6-Baum mit Underflow im zweiten Nachfolger der Wurzel: