Randomisierte Algorithmen und probabilistische Methoden

Aufgabe 1 Las-Vegas

Gegeben sei ein *Las-Vegas* Algorithmus A der bei einer Eingabe der Größe n Laufzeit $T(n)$ hat. Konstruieren Sie einen Algorithmus der *immer* die richtige Antwort gibt. Was ist die erwartete Laufzeit Ihres Algorithmus?

Aufgabe 2 John von Neumann's Münz Trick

Ihre Aufgabe besteht darin ein Zufallsbit zu erzeugen, das mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Ergebnis 1 hat. Dummerweise haben Sie nur eine „verbeulte" Münze zur Verfügung, d.h., eine Münze mit *unbekannter* Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ für „Kopf". Konstruieren Sie ein Verfahren um ein gewünschtes Zufallsbit zu erzeugen. Wie ist die erwartete Laufzeit Ihres Algorithmus? *Hinweis.* Betrachten Sie Paare von Münzwürfen.

Aufgabe 3 Färbung

Sei M eine Menge. Eine r-*Färbung* von M ist eine Abbildung $c : M \longrightarrow \{1, 2, \ldots, r\}$. Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt *monochromatisch*, wenn alle ihre Elemente die gleiche Farbe haben, d.h., $c(i) = c(j)$ für alle $i, j \in X$. Gegeben sei eine Familie $F = (F_1, \ldots, F_n)$ von Mengen, so dass $F_i \subseteq M$ und $|F_i| = k$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Zeigen Sie, dass es für $n < 2^{k-1}$ stets eine 2-Färbung c gibt, so dass *keine* der Mengen F_i monochromatisch ist. Können Sie eine ähnliche Schranke auch für $r \geq 3$ finden?