Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Alexander Souza

SS 2007
Übungsblatt 5

Randomisierte Algorithmen und probabilistische Methoden

Aufgabe 1 Notwendigkeit der Voraussetzungen von Satz 4.3

Konstruieren Sie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, die nicht-negative ganzzahlige Werte annehmen und für die für ein $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] = \infty \text{ aber } \Pr\left[X_n = 0\right] > \varepsilon.$$

Dies soll zeigen, dass die Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = 0$ tatsächlich notwendig ist um

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[X_n = 0\right] = 0$$

zu zeigen.

Aufgabe 2 Einsame Bälle

Angenommen wir werfen m Bälle in n Urnen. Die Zufallsvariable X nimmt genau dann den Wert 0 an wenn alle Bälle allein in ihrer Urne sind. Definieren Sie X als Summe von geeigneten Indikatorvariablen und zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[X = 0\right] = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = o(\sqrt{n}) \\ 0 & \text{falls } m = \omega(\sqrt{n}). \end{cases}$$

Verwenden Sie die Methode der ersten und zweiten Momente.