Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Alexander Souza

SS 2007
Übungsblatt 09

Randomisierte Algorithmen und probabilistische Methoden

Aufgabe 1 Rekursionen

Zeigen Sie, dass die Lösung einer linearen Rekursion k-ten Grades

$$f_n = a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_k$ und den Nebenbedingungen $f_1 = b_1, \ldots, f_k = b_k$ die Form

$$f_n = c_1 \lambda_1^n + \cdots + c_k \lambda_k^n$$

hat, wobei die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

seien und die $c_1, \ldots, c_k$ durch die $f_1, \ldots, f_k$ eindeutig bestimmt sind.
Hinweis. Betrachten Sie die Vektoren $\vec{x}_i = (f_i, f_{i-1}, \ldots, f_{i-k+1})^\top$ und drücken Sie $\vec{x}_n$ zunächst durch M und $\vec{x}_{n-1}$ aus. Drücken Sie $\vec{x}_n$ dann durch M und $\vec{x}_k$ aus.

Aufgabe 2 Gambler's Ruin

Ermitteln Sie die Lösung zur linearen Rekursion 2-ten Grades aus der Vorlesung

$$f_{i+1} = \frac{1}{p} f_i - \frac{1-p}{p} f_{i-1},$$

wobei $0 < p < 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gelte.