



# Algorithmentheorie

## 02 - Polynomprodukt und Fast Fourier Transformation

**Prof. Dr. S. Albers**  
**Prof. Dr. Th. Ottmann**

# 1. Polynome

---

**Reelles Polynom  $p$  in einer Variablen  $x$**

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$a_0, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ : **Koeffizienten** von  $p$

**Grad** von  $p$ : höchste Potenz in  $p$  ( $= n$ )

**Beispiel:**

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$$

Menge aller reellen Polynome:  $R[x]$

## 2. Operationen auf Polynomen

---

$$p, q \in R[x]$$

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 \\ q(x) &= b_n x^n + \dots + b_1 x^1 + b_0 \end{aligned}$$

### 1. Addition

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + \dots + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x^1 + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

# Operationen auf Polynomen

## 2. Produkt

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (a_n x^n + \dots + a_0)(b_n x^n + \dots + b_0) \\ &= c_{2n} x^{2n} + \dots + c_1 x^1 + c_0 \end{aligned}$$

$c_i$ : Welche Monomprodukte haben Grad  $i$ ?

$$\Rightarrow c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \quad i = 0, \dots, 2n.$$

$$a_{n+1} = \dots = a_{2n} = 0, b_{n+1} = \dots = b_{2n} = 0$$

Polynomring  $R[x]$

# Operationen auf Polynomen

---

## 3. Auswerten an der Stelle $x_0$ : **Horner-Schema**

$$p(x_0) = (\dots(a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + \dots + a_1)x_0 + a_0$$

Zeit:  $O(n)$

# 3. Repräsentation eines Polynoms

---

$$p(x) \in R[x]$$

Möglichkeit zur Repräsentation von  $p(x)$ :

## 1. Koeffizientendarstellung

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

**Beispiel:**

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$$

# Repräsentation eines Polynoms

---

## 2. Nullstellenprodukt

$$p(x) \in R[x]$$

$$p(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

**Beispiel:**

$$p(x) = 3x(x - 2)(x - 3)$$

# Repräsentation eines Polynoms

---

## 3. Punkt/Wertdarstellung

### Interpolationslemma

Jedes Polynom  $p(x)$  aus  $R[x]$  vom Grad  $n$  ist eindeutig bestimmt durch  $n+1$  Paare  $(x_i, p(x_i))$ , mit  $i = 0, \dots, n$  und  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$

### Beispiel:

Das Polynom

$$p(x) = 3x(x-2)(x-3)$$

wird durch die Paare  $(0,0)$ ,  $(1,6)$ ,  $(2,0)$ ,  $(3,0)$  eindeutig festgelegt.

# Operationen auf Polynomen

$p, q \in R[x]$ ,  $\text{Grad}(p) = \text{Grad}(q) = n$

- **Koeffizientendarstellung**

Addition:  $O(n)$

Produkt:  $O(n^2)$

Auswertung an der Stelle  $x_0$ :  $O(n)$

- **Punkt/Wertdarstellung**

$$p = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

$$q = (x_0, z_0), (x_1, z_1), \dots, (x_n, z_n)$$

# Operationen auf Polynomen

---

## **Addition:**

$$p + q = (x_0, y_0 + z_0), (x_1, y_1 + z_1), \dots, (x_n, y_n + z_n)$$

Zeit:  $O(n)$

## **Produkt:**

$$p \cdot q = (x_0, y_0 \cdot z_0), (x_1, y_1 \cdot z_1), \dots, (x_n, y_n \cdot z_n)$$

(Voraussetzung:  $n \geq \text{Grad}(pq)$ )

Zeit:  $O(n)$

## **Auswerten an der Stelle $x'$ : ??**

Umwandeln in Koeffizientendarstellung

(Interpolation)

# Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome  $p, q$  vom Grade  $< n$

$p, q$  Grad  $n-1$ ,  $n$  Koeffizienten



**Auswertung:**  $x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}$

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(x_i, p(x_i))$  und  $(x_i, q(x_i))$



**Punktweise Multiplikation**

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(x_i, pq(x_i))$



**Interpolation**

$pq$  Grad  $2n-2$ ,  $2n-1$  Koeffizienten

# Ansatz für Divide and Conquer

**Idee:** ( $n$  sei gerade)

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ &= a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + \\ &\quad a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ &= a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}(x^2)^{(n-2)/2} + \\ &\quad x(a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}(x^2)^{(n-2)/2}) \\ &= p_0(x^2) + xp_1(x^2) \end{aligned}$$

$$p_0(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{(n-2)/2}$$

$$p_1(x) = a_1 + a_3x + \dots + a_{n-1}x^{(n-2)/2}$$

Wähle  $x_0, \dots, x_{2n-1}$ , so dass Berechnung von  $p(x_k)$  und  $p(x_{k+n/2})$  fast identisch.

# Repräsentation von $p(x)$

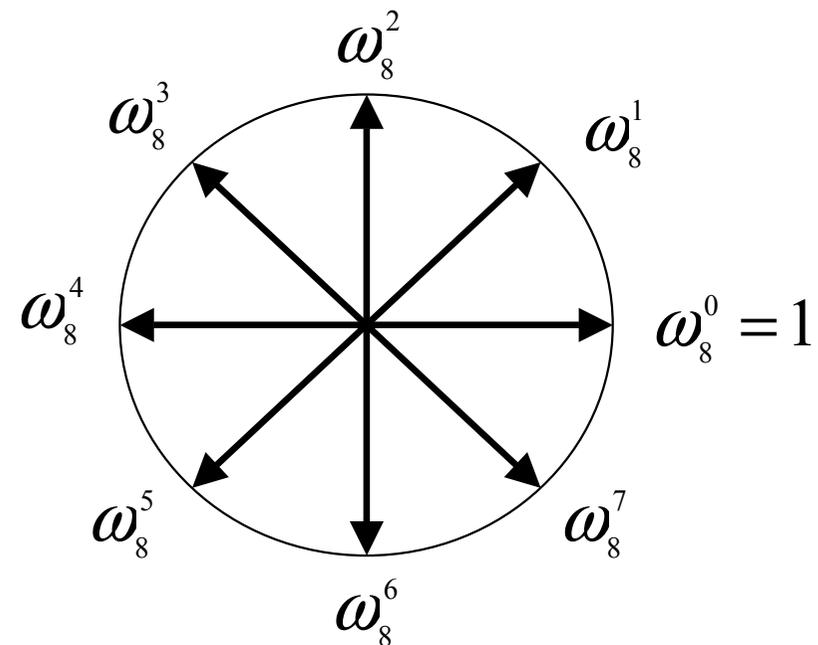
**Annahme:**  $\text{Grad}(p) < n$

**3a. Werte an den  $n$  Potenzen der  $n$ -ten komplexen  
Haupteinheitswurzel**  $\omega_n = e^{2\pi i/n}$

$$i = \sqrt{-1} \quad e^{2\pi i} = 1$$

Potenz von  $\omega_n$  (Einheitswurzeln):

$$1 = \omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$$



# Diskrete Fourier Transformation

Werte von  $p$  für die  $n$  Potenzen von  $\omega_n$  legen  $p$  eindeutig fest, falls  $\text{Grad}(p) < n$ .

## Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$DFT_n(p) = (p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \dots, p(\omega_n^{n-1}))$$

### Beispiel: $n=4$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

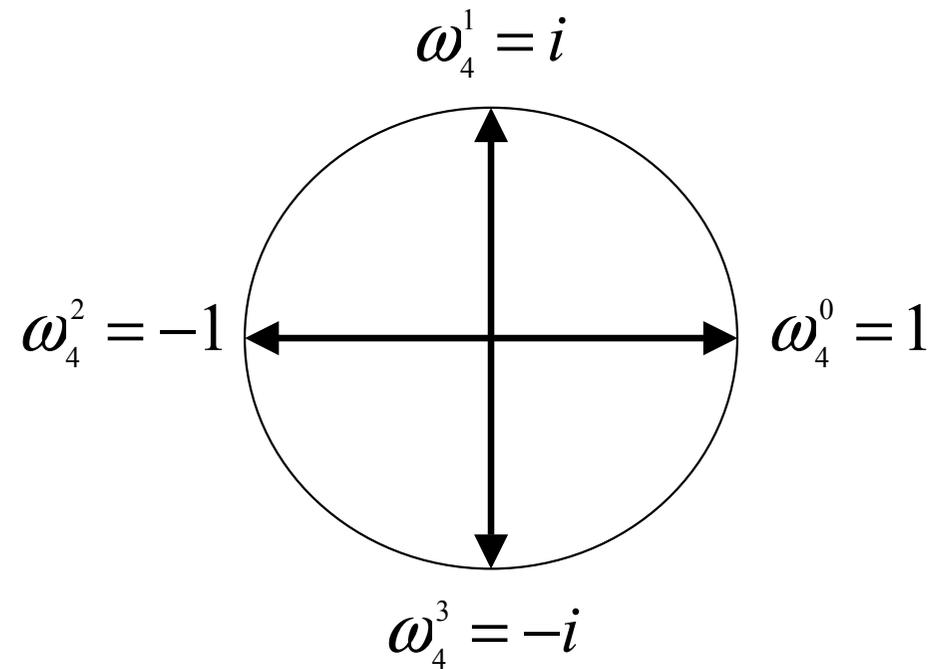
$$\omega_4^0 = e^{0i} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$\omega_4^1 = e^{2\pi i/4} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$$

$$\omega_4^2 = (e^{2\pi i/4})^2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\omega_4^3 = (e^{2\pi i/4})^3 = \cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2) = -i$$

# Auswertung an den Einheitswurzeln



$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$$

# Auswertung an den Einheitswurzeln

---

$$(\omega_4^0, p(\omega_4^0)) = (1, p(1)) = (1, 6)$$

$$(\omega_4^1, p(\omega_4^1)) = (i, p(i)) = (i, 15 + 15i)$$

$$(\omega_4^2, p(\omega_4^2)) = (-1, p(-1)) = (-1, -36)$$

$$(\omega_4^3, p(\omega_4^3)) = (-i, p(-i)) = (-i, 15 - 15i)$$

$$DFT_4(p) = (6, 15 + 15i, -36, 15 - 15i)$$

# Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome  $p, q$  vom Grade  $< n$

$p, q$  Grad  $n-1$ ,  $n$  Koeffizienten



**Auswertung:**  $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, p(\omega_{2n}^i))$  und  $(\omega_{2n}^i, q(\omega_{2n}^i))$



**Punktweise Multiplikation**

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, pq(\omega_{2n}^i))$



**Interpolation**

$pq$  Grad  $2n-2$ ,  $2n-1$  Koeffizienten

## 4. Eigenschaften der Einheitswurzel

$\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$  bilden eine **multiplikative Gruppe**

### Kürzungslemma

Für alle  $n > 0$ ,  $0 \leq k \leq n$ , und  $d > 0$  gilt:

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$

**Beweis:**

$$\omega_{dn}^{dk} = e^{2\pi i dk / (dn)} = e^{2\pi i k / n} = \omega_n^k$$

Folge:  $\omega_{2n}^n = \omega_2^1 = -1$

# Eigenschaften der Einheitswurzel

## Halbierungslemma

Die Menge der Quadrate der  $2n$  komplexen  $2n$ -ten Einheitswurzeln

$$\left\{ (\omega_{2n}^0)^2, (\omega_{2n}^1)^2, \dots, (\omega_{2n}^{2n-1})^2 \right\}$$

ist gleich der Menge der  $n$  komplexen  $n$ -ten Einheitswurzeln

$$\left\{ \omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1} \right\}$$

**Beweis:**

$$(\omega_{2n}^k)^2 = \omega_{2n}^{2k} = \omega_n^k$$

$$\underbrace{(\omega_{2n}^0)^2}_{\omega_n^0}, \underbrace{(\omega_{2n}^1)^2}_{\omega_n^1}, \dots, \underbrace{(\omega_{2n}^k)^2}_{\omega_n^k}, \dots, \underbrace{(\omega_{2n}^{n+k})^2}_{\omega_n^{n+k} = \omega_n^n \omega_n^k = \omega_n^k}, \dots,$$

# Eigenschaften der Einheitswurzel

## Summationslemma

Für alle  $n > 0, j \geq 0$  mit  $n \nmid j$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$$

**Beweis:**

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^j)^k = \frac{(\omega_n^j)^n - 1}{\omega_n^j - 1} = \frac{(\omega_n^n)^j - 1}{\omega_n^j - 1} = 0$$

# 5. Diskrete Fourier Transformation

---

$$DFT_n(p) = (p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \dots, p(\omega_n^{n-1}))$$

## **Fast Fourier Transformation:**

Berechnung von  $DFT_n(p)$  mittels  
eines Divide-and-Conquer Ansatzes

# Diskrete Fourier Transformation

**Idee:** ( $n$  sei gerade)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\
 &= a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + \\
 &\quad a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\
 &= a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}(x^2)^{(n-2)/2} + \\
 &\quad x(a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}(x^2)^{(n-2)/2}) \\
 &= p_0(x^2) + xp_1(x^2)
 \end{aligned}$$

$$p_0(x) = a_0 + a_2x + \dots + a_{n-2}x^{(n-2)/2}$$

$$p_1(x) = a_1 + a_3x + \dots + a_{n-1}x^{(n-2)/2}$$

# Diskrete Fourier Transformation

Auswertung für  $k = 0, \dots, n - 1$

$$p(\omega_n^k) = p_0((\omega_n^k)^2) + \omega_n^k p_1((\omega_n^k)^2) = \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}) \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} DFT_n(p) &= (p_0(\omega_n^0), \dots, p_0(\omega_n^{n/2-1}), p_0(\omega_n^0), \dots, p_0(\omega_n^{n/2-1})) \\ &+ (\omega_n^0 p_1(\omega_n^0), \dots, \omega_n^{n/2-1} p_1(\omega_n^{n/2-1}), \omega_n^{n/2} p_1(\omega_n^0), \dots, \omega_n^{n-1} p_1(\omega_n^{n/2-1})) \end{aligned}$$

# Diskrete Fourier Transformation

---

## Beispiel:

$$p(\omega_4^0) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^1) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

$$p(\omega_4^2) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^2 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^3) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^3 p_1(\omega_2^1)$$

# Berechnung von $DFT_n$

$$DFT_n(p) = (p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \dots, p(\omega_n^{n-1}))$$

**Einfachster Fall:**  $n = 1$  (Grad( $p$ ) =  $n - 1 = 0$ )

$$DFT_1(p) = a_0$$

**Sonst :**

**Divide:**

Teile  $p$  in  $p_0$  und  $p_1$  auf

**Conquer:**

Berechne  $DFT_{n/2}(p_0)$  und  $DFT_{n/2}(p_1)$  rekursiv

**Merge:**

Berechne für  $k = 0, \dots, n - 1$ :

$$DFT_n(p)_k = (DFT_{n/2}(p_0), DFT_{n/2}(p_0))_k + \omega_n^k \cdot (DFT_{n/2}(p_1), DFT_{n/2}(p_1))_k$$

# Eine kleine Verbesserung

$$\begin{aligned}
 p(\omega_n^k) &= \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}) \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) - \omega_n^{k-n/2} p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}), \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Also falls  $k < n/2$ :

$$\begin{aligned}
 p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k) &= p(\omega_n^k) \\
 p_0(\omega_{n/2}^k) - \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k) &= p(\omega_n^{k+n/2})
 \end{aligned}$$

# Eine kleine Verbesserung

---

## Beispiel:

$$p(\omega_4^0) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^1) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

$$p(\omega_4^2) = p_0(\omega_2^0) - \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^3) = p_0(\omega_2^1) - \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

## 6. Fast Fourier Transformation

### Algorithmus *FFT*

**Input:** Ein Array  $a$  mit den  $n$  Koeffizienten eines Polynoms  $p$   
und  $n = 2^k$

**Output:**  $DFT_n(p)$

1. **if**  $n = 1$  **then** /\*  $p$  ist konstant \*/
2. **return**  $a$
3.  $d^{[0]} = FFT([a_0, a_2, \dots, a_{n-2}], n/2)$
4.  $d^{[1]} = FFT([a_1, a_3, \dots, a_{n-1}], n/2)$
5.  $\omega_n = e^{2\pi i/n}$
6.  $\omega = 1$
7. **for**  $k = 0$  **to**  $n/2 - 1$  **do** /\*  $\omega = \omega_n^{k*}$  \*/
8.  $d_k = d_k^{[0]} + \omega \cdot d_k^{[1]}$
9.  $d_{k+n/2} = d_k^{[0]} - \omega \cdot d_k^{[1]}$
10.  $\omega = \omega_n \cdot \omega$
11. **return**  $d$

# FFT : Beispiel

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x + 0$$

$$a = [0, 18, -15, 3]$$

$$a^{[0]} = [0, -15] \quad a^{[1]} = [18, 3]$$

$$\begin{aligned} FFT([0, -15], 2) &= (FFT([0], 1) + FFT([-15], 1), \quad FFT([0], 1) - FFT([-15], 1)) \\ &= (-15, 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FFT([18, 3], 2) &= (FFT([18], 1) + FFT([3], 1), \quad FFT([18], 1) - FFT([3], 1)) \\ &= (21, 15) \end{aligned}$$

$$k = 0; \omega = 1$$

$$d_0 = -15 + 1 * 21 = 6$$

$$d_2 = -15 - 1 * 21 = -36$$

$$k = 1; \omega = i$$

$$d_1 = 15 + i * 15$$

$$d_3 = 15 - i * 15$$

$$FFT(a, 4) = (6, 15 + 15i, -36, 15 - 15i)$$

# 7. Analyse

---

$T(n)$  = Zeit um ein Polynom vom Grad  $< n$  an den Stellen  $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$  auszuwerten.

$$T(1) = O(1)$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 T(n/2) + O(n) \\ &= O(n \log n) \end{aligned}$$

# Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome  $p, q$  vom Grade  $< n$

$p, q$  Grad  $n-1$ ,  $n$  Koeffizienten



**Auswertung durch FFT:**  $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, p(\omega_{2n}^i))$  und  $(\omega_{2n}^i, q(\omega_{2n}^i))$



**Punktweise Multiplikation**

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, pq(\omega_{2n}^i))$



**Interpolation**

$pq$  Grad  $2n-2$ ,  $2n-1$  Koeffizienten

# Interpolation

Umrechnung der Punkt/Wert-Darstellung in die Koeffizientendarstellung

**Gegeben:**  $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$  mit  $x_i \neq x_j$ , für alle  $i \neq j$

**Gesucht:** Polynom  $p$  mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}$ ,  
so dass

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} = y_0 \\ p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ p(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ &\vdots \\ p(x_{n-1}) &= a_0 + a_1 x_{n-1} + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} = y_{n-1} \end{aligned}$$

# Interpolation

## Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

# Interpolation

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist lösbar für  $x_i \neq x_j$ , für alle  $i \neq j$

**Spezialfall** (hier) :  $x_i = \omega_n^i$

**Definition:**

$$V_n = (\omega_n^{ij})_{i,j}, \quad a = (a_i), \quad y = (y_i)$$

$$V_n a = y \quad \Rightarrow \quad a = V_n^{-1} y$$

# Interpolation

## Satz

Für alle  $0 \leq i, j \leq n - 1$  gilt:

$$(V_n^{-1})_{ij} = \frac{\omega_n^{-ij}}{n}$$

## Beweis

$$V_n^{-1} = \left( \frac{\omega_n^{-ij}}{n} \right)_{i,j}$$

zu zeigen:

$$V_n^{-1} V_n = I_n$$

# Interpolation

Betrachte Eintrag von  $V_n^{-1}V_n$  in Zeile  $i$ , Spalte  $j$ :

$$(V_n^{-1}V_n)_{ij} =$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{\omega_n^{-i}}{n} & \dots & \frac{\omega_n^{-i(n-1)}}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \\ \dots & \omega_n^j & \dots \\ \dots & \omega_n^{2j} & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \omega_n^{(n-1)j} & \dots \end{pmatrix}_{ij}$$

# Interpolation

$$(V_n^{-1}V_n)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_n^{-ik}}{n} \omega_n^{jk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(-i+j)k}$$

**Fall 1:**  $i = j$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(-i+j)k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{0 \cdot k} = 1$$

**Fall 2:**  $i \neq j$ , d.h.  $-(n-1) \leq -i+j \leq n-1$  und damit  $n \nmid -i+j$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(-i+j)k} = 0$$

# Interpolation

---

## Summationslemma

Für alle  $n > 0$ ,  $j \geq 0$  mit  $n \nmid j$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$$

# Interpolation

$$\begin{aligned} a_i &= (V_n^{-1} \mathbf{y})_i \\ &= \left( \frac{1}{n}, \frac{\omega_n^{-i}}{n}, \dots, \frac{\omega_n^{-i(n-1)}}{n} \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\omega_n^{-ik}}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k (\omega_n^{-i})^k \end{aligned}$$

# Interpolation

---

$$a = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} y_k (\omega_n^{-0})^k, \sum_{k=0}^{n-1} y_k (\omega_n^{-1})^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} y_k (\omega_n^{-(n-1)})^k \right)$$

$$r(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots + y_{n-1} x^{n-1}$$

$$a = \frac{1}{n} \left( r(\omega_n^{-0}), r(\omega_n^{-1}), \dots, r(\omega_n^{-(n-1)}) \right)$$

# Interpolation und DFT

$$a = \frac{1}{n} (r(\omega_n^{-0}), r(\omega_n^{-1}), \dots, r(\omega_n^{-(n-1)}))$$

$$a = \frac{1}{n} (r(\omega_n^n), r(\omega_n^{n-1}), \dots, r(\omega_n^1)) \quad \text{denn } \omega_n^n = 1$$

$$a_i = \frac{1}{n} (DFT_n(r))_{n-i} \quad (i \neq 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{n} (DFT_n(r))_0$$

# Polynomprodukt durch FFT

Berechnung des Produkts zweier Polynome  $p, q$  vom Grade  $< n$

$p, q$  Grad  $n-1$ ,  $n$  Koeffizienten



**Auswertung durch FFT:**  $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \dots, \omega_{2n}^{2n-1}$

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, p(\omega_{2n}^i))$  und  $(\omega_{2n}^i, q(\omega_{2n}^i))$



**Punktweise Multiplikation**

$2n$  Punkt/Wertpaare  $(\omega_{2n}^i, pq(\omega_{2n}^i))$



**Interpolation durch FFT**

$pq$  Grad  $2n-2$ ,  $2n-1$  Koeffizienten