



Algorithmentheorie

04 - Treaps

Prof. Dr. S. Albers
Prof. Dr. Th. Ottmann

Das Wörterbuch-Problem

Gegeben: Universum $(U, <)$ von Schlüsseln mit einer totalen Ordnung

Ziel: Verwalte Menge $S \subseteq U$, mit folgenden Operationen

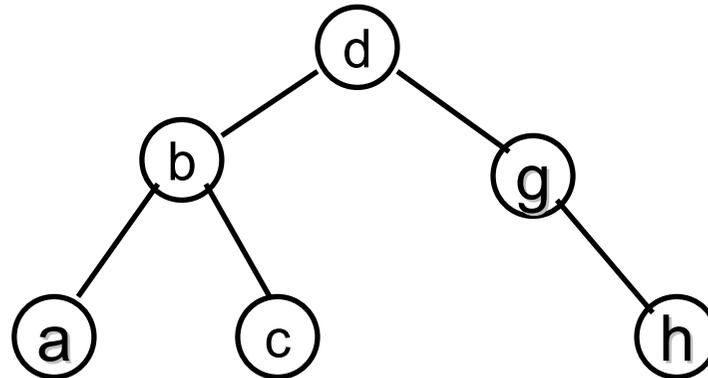
- **Suche** (x, S) : Ist $x \in S$?
- **Einfüge** (x, S) : Füge x zu S hinzu, sofern noch nicht vorhanden.
- **Entferne** (x, S) : Entferne x aus S .

Erweiterte Operationen

- **Minimum(S):** Finde kleinsten Schlüssel.
- **Maximum(S):** Finde größten Schlüssel.
- **List(S):** Gib Einträge in aufsteigender Reihenfolge aus.
- **Vereinige(S_1, S_2):** Vereinige S_1 und S_2 .
Voraussetzung: $\forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2: x_1 < x_2$
- **Spalte(S, x, S_1, S_2):** Spalte S in S_1 und S_2 .
 $\forall x_1 \in S_1, x_2 \in S_2: x_1 \leq x$ und $x_2 > x$

Bekannte Lösungen

- **Binäre Suchbäume**



Nachteil: Sequenz von Einfügungen kann zu einer linearen Liste führen a, b, c, d, e, f

- **Höhenbalancierte Bäume:** AVL-Bäume, (a,b)-Bäume
Nachteil: Komplexe Algorithmen oder hoher Speicherbedarf

Ansatz für randomisierte Suchbäume

Werden n Elemente in zufälliger Reihenfolge in einen binären Suchbaum eingefügt, so ist die erwartete Tiefe $1,39 \log n$.

Idee: Jedes Element x erhält eine zufällig gewählte

Priorität $\text{prio}(x) \in R$

Ziel ist es, die folgende Eigenschaft herzustellen.

(*) Der Suchbaum hat die Struktur, die entstanden wäre, wenn die Elemente in der durch die Prioritäten gegebenen Reihenfolge eingefügt worden wären.

Treaps (Tree + Heap)

Definition: Ein Treap ist ein binärer Baum.

Jeder Knoten enthält ein Element x mit $\text{key}(x) \in U$ und $\text{prio}(x) \in R$.

Es gelten die folgenden Eigenschaften.

- **Suchbaum-Eigenschaft**

Für jedes Element x gilt:

- Elemente y im linken Teilbaum von x erfüllen: $\text{key}(y) < \text{key}(x)$
- Elemente y im rechten Teilbaum von x erfüllen: $\text{key}(y) > \text{key}(x)$

- **Heap-Eigenschaft**

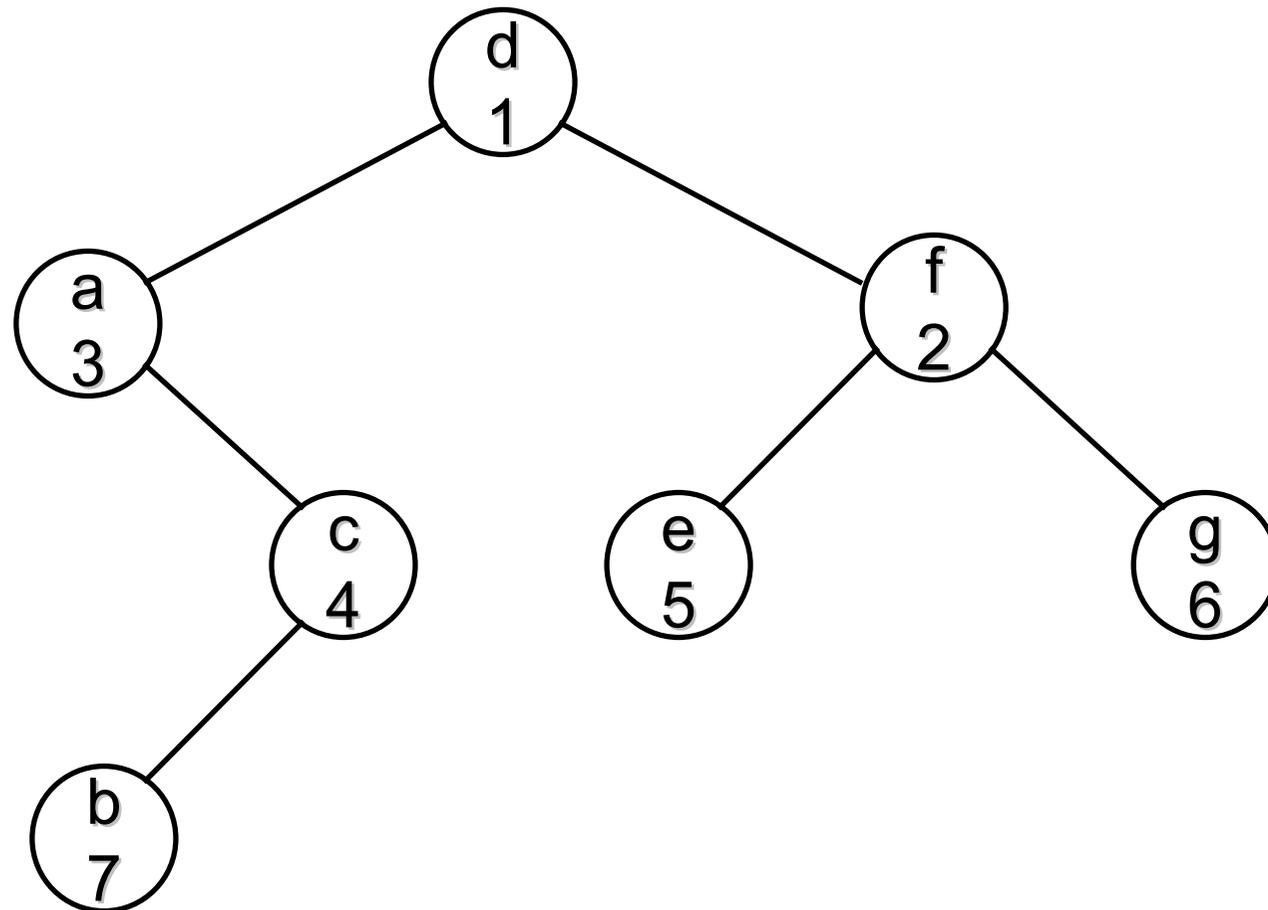
Für alle Elemente x, y gilt:

Ist y ein Kind von x , so ist $\text{prio}(y) > \text{prio}(x)$.

Alle Prioritäten sind verschieden.

Beispiel

Schlüssel	a	b	c	d	e	f	g
Priorität	3	7	4	1	5	2	6



Eindeutigkeit von Treaps

Lemma: Für Elemente x_1, \dots, x_n mit $\text{key}(x_i)$ und $\text{prio}(x_i)$ existiert ein eindeutiger Treap. Dieser erfüllt Eigenschaft (*).

Beweis:

$n=1$: ok

$n>1$: Element x mit kleinster Priorität ist in der Wurzel.

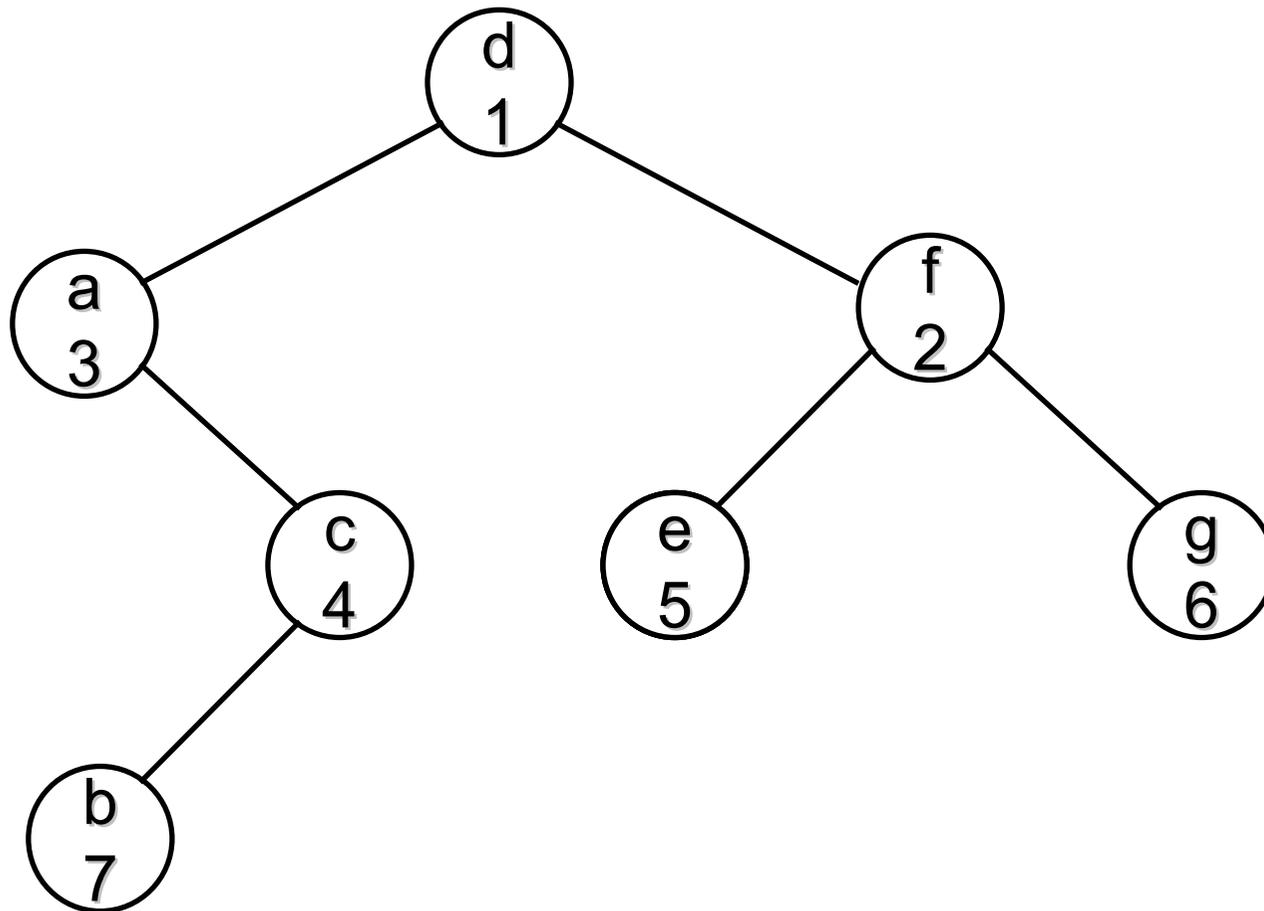
Elemente y mit $\text{key}(y) < \text{key}(x)$ sind im linken Teilbaum.

Nach Induktionsvoraussetzung ist der Treap für diese Elemente eindeutig.

Analog für den rechten Teilbaum.

Der zweite Teil des Lemmas wird analog gezeigt.

Suche nach einem Element



Suche nach Element mit Schlüssel k

```
1   $v :=$  Wurzel;  
2  while  $v \neq \text{nil}$  do  
3      case  $\text{key}(v) = k$  : stop; “Element gefunden” (erfolgreiche Suche)  
4           $\text{key}(v) < k$  :  $v :=$  RechtesKind( $v$ );  
5           $\text{key}(v) > k$  :  $v :=$  LinkesKind( $v$ );  
6      endcase;  
7  endwhile;  
8  “Element nicht gefunden” (nicht erfolgreiche Suche)
```

Laufzeit: $O(\# \text{ Elemente auf dem Suchpfad})$

Analyse des Suchpfads

Elemente x_1, \dots, x_n x_i hat i -t kleinsten Schlüssel
 M sei Teilmenge der Elemente

$P_{\min}(M)$ = Element aus M mit kleinster Priorität

Lemma:

- a) Sei $i < m$. x_i ist Vorfahre von x_m gdw $P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\}) = x_i$
b) Sei $m < i$. x_i ist Vorfahre von x_m gdw $P_{\min}(\{x_m, \dots, x_i\}) = x_i$

Analyse des Suchpfads

Beweis: a) (Sei $i < m$. x_i ist Vorfahre von x_m gdw $P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\}) = x_i$)
Verwende (*). El. werden gemäß steigenden Prioritäten eingefügt.
 $P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\}) = x_i \Rightarrow x_i$ wird als erstes aus $\{x_i, \dots, x_m\}$ eingefügt

“ \Leftarrow ” Wenn x_i eingefügt wird, enthält der Baum nur Schlüssel k mit
 $k < \text{key}(x_i)$ oder $k > \text{key}(x_m)$

Alle Elemente aus $\{x_{i+1}, \dots, x_m\}$ durchlaufen denselben Pfad wie x_i
und sind somit Nachfahren von x_i .



Analyse des Suchpfads



Beweis: a) (Sei $i < m$. x_i ist Vorfahre von x_m gdw $P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\}) = x_i$)

“ \Rightarrow ” Sei $x_j = P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\})$. Z.z. $x_i = x_j$

Annahme: $x_i \neq x_j$

Alle El. aus $\{x_i, \dots, x_m\}$ werden Teil des Unterbaums mit **Wurzel** x_j

Fall 1: $x_j = x_m$

x_m ist Vorfahre von x_i

Fall 2: $x_j \neq x_m$

x_i kommt in den linken Teilbaum von x_j .

x_m kommt in den rechten Teilbaum von x_j .

Teil b) analog.

Analyse der Suche-Operation



Sei T ein Treap mit Elementen x_1, \dots, x_n x_i hat i -t kleinsten Schlüssel

n -te Harmonische Zahl:

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$$

Lemma:

1. **Erfolgreiche Suche:** Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Pfad nach x_m ist $H_m + H_{n-m+1} - 1$.
2. **Nicht erfolgreiche Suche:** Sei m die Anzahl der Schlüssel, die kleiner als der gesuchte Schlüssel k sind. Die erwartete Anzahl von Knoten auf dem Suchpfad ist $H_m + H_{n-m}$.

Analyse der Suche-Operation

Beweis: Teil 1

$$X_{m,i} = \begin{cases} 1 & x_i \text{ ist Vorfahre von } x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$X_m = \#$ Knoten auf Pfad von der Wurzel nach x_m (inkl. x_m)

$$X_m = 1 + \sum_{i < m} X_{m,i} + \sum_{i > m} X_{m,i}$$

$$E[X_m] = 1 + E\left[\sum_{i < m} X_{m,i}\right] + E\left[\sum_{i > m} X_{m,i}\right]$$

Analyse der Suche-Operation

$i < m$:

$$E[X_{m,i}] = \text{Prob}[x_i \text{ ist Vorfahre von } x_m] = 1/(m - i + 1)$$

Alle El. aus $\{x_i, \dots, x_m\}$ haben mit gleicher WSK die kleinste Priorität

$$\text{Prob}[P_{\min}(\{x_i, \dots, x_m\}) = x_i] = 1/(m-i+1)$$

$i > m$:

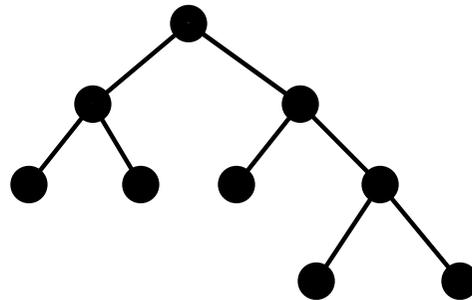
$$E[X_{m,i}] = 1/(i - m + 1)$$

$$\begin{aligned} E[X_m] &= 1 + \sum_{i < m} \frac{1}{m - i + 1} + \sum_{i > m} \frac{1}{i - m + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n - m + 1} \\ &= H_m + H_{n-m+1} - 1 \end{aligned}$$

Teil 2 analog

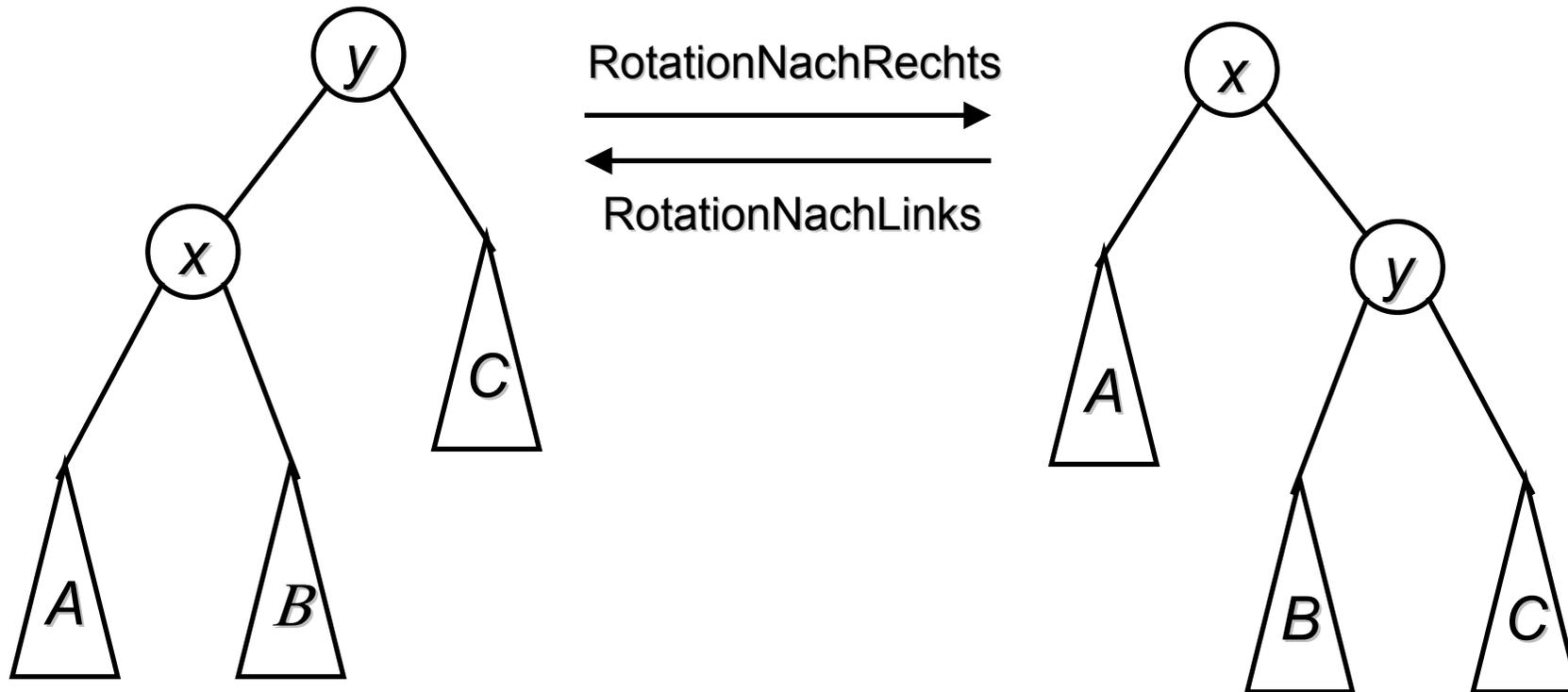
Einfügen eines neuen Elements x

1. Wähle $\text{prio}(x)$.
2. Suche nach der Position von x im Baum.



3. Füge x als Blatt ein.
4. Stelle Heap-Eigenschaft wieder her.
while $\text{prio}(\text{Elter}(x)) > \text{prio}(x)$ **do**
 if x ist linkes Kind **then** $\text{RotiereNachRechts}(\text{Elter}(x))$
 else $\text{RotiereNachLinks}(\text{Elter}(x));$
endif
endwhile;

Rotationen

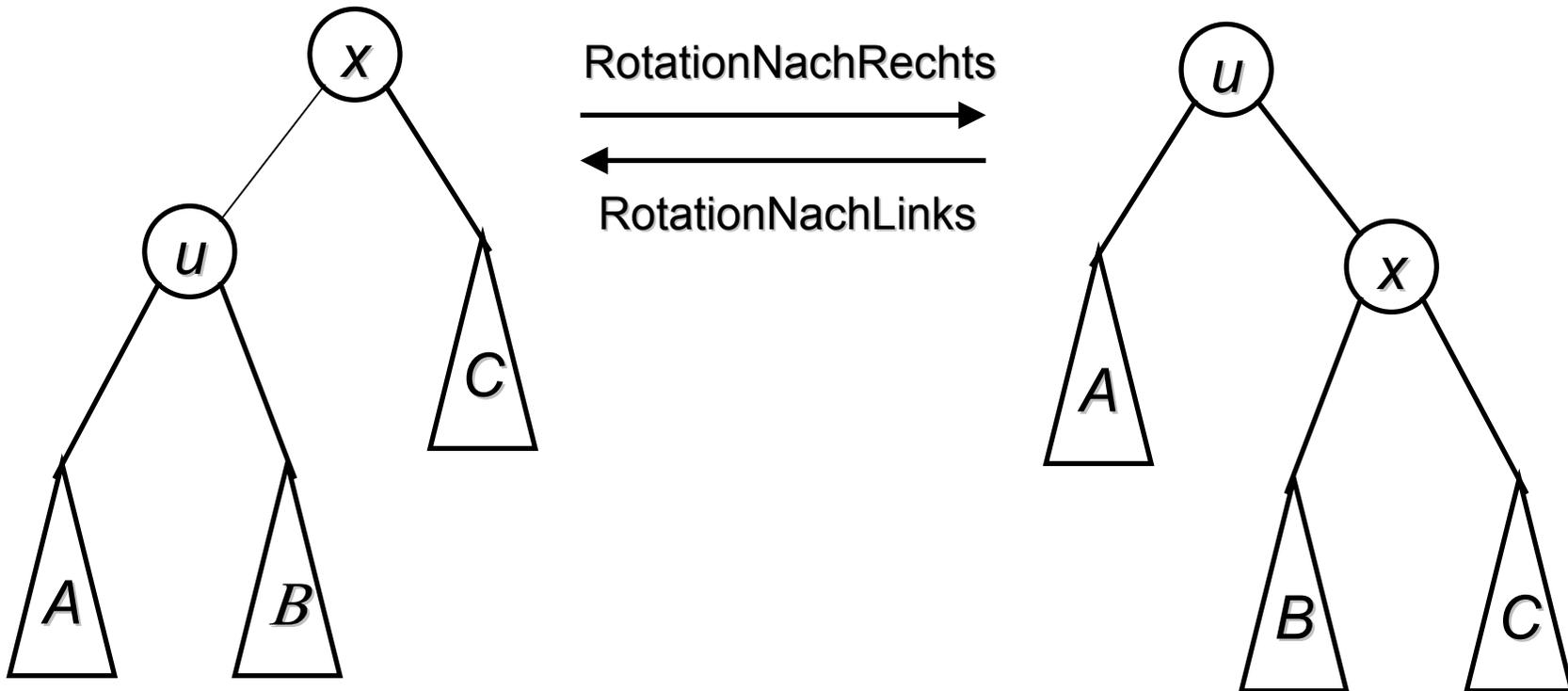


Die Rotationen erhalten die Suchbaum-Eigenschaft und stellen die Heap-Eigenschaft wieder her.

Entfernen eines Elements x

1. **Suche** x in dem Baum.
2. **while** x ist kein Blatt **do**
 - $u :=$ Kind mit kleinerer Priorität;
 - if** u ist linkes Kind **then** RotiereNachRechts(x)
else RotiereNachLinks(x);
 - endif;**
 - endwhile;**
3. Entferne x ;

Rotationen



Analyse der Einfüge- u. Entferne-Operationen



Lemma: Die erwartete Laufzeit einer Einfüge- bzw. Entferne-Operation ist $O(\log n)$. Die erwartete Anzahl der Rotationen ist 2.

Beweis: Analyse einer Einfügung (Entfernung ist inverse Operation)

#Rotationen = Tiefe von x nach Einfügung als Blatt (1)

- Tiefe von x nach den Rotationen (2)

Sei $x = x_m$

(2) erwartete Tiefe ist $H_m + H_{n-m+1} - 1$

(1) erwartete Tiefe ist $H_{m-1} + H_{n-m} + 1$

Baum enthält $n-1$ Elemente, $m-1$ sind kleiner.

#Rotationen = $H_{m-1} + H_{n-m} + 1 - (H_m + H_{n-m+1} - 1) < 2$

Erweiterte Operationen

n = Anzahl Elemente im Treap T .

- **Minimum(T):** Finde kleinsten Schlüssel. $O(\log n)$
- **Maximum(T):** Finde größten Schlüssel. $O(\log n)$
- **List(T):** Gib Einträge in aufsteigender Reihenfolge aus. $O(n)$

- **Vereinige(T_1, T_2):** Vereinige T_1 und T_2 .
Voraussetzung: $\forall x_1 \in T_1, x_2 \in T_2: \text{key}(x_1) < \text{key}(x_2)$
- **Spalte(T, k, T_1, T_2):** Spalte T in T_1 und T_2 .
 $\forall x_1 \in T_1, x_2 \in T_2: \text{key}(x_1) \leq k$ und $\text{key}(x_2) > k$

Die Spalte-Operation

Spalte(T, k, T_1, T_2): Spalte T in T_1 und T_2 .

$$\forall x_1 \in T_1, x_2 \in T_2: \text{key}(x_1) \leq k \text{ und } \text{key}(x_2) > k$$

O.B.d.A. Schlüssel k nicht in T .

Andernfalls lösche Element mit Schlüssel k und füge es nach der Spalte-Operation in T_1 ein.

1. Erzeuge neues Element x mit $\text{key}(x)=k$ und $\text{prio}(x) = -\infty$.
2. Füge x in T ein.
3. Entferne die neue Wurzel. Der linke Unterbaum ist T_1 , der rechte T_2 .

Die Vereinige-Operation

Vereinige(T_1, T_2): Vereinige T_1 und T_2 .

Voraussetzung: $\forall x_1 \in T_1, x_2 \in T_2: \text{key}(x_1) < \text{key}(x_2)$

1. Ermittle Schlüssel k mit $\text{key}(x_1) < k < \text{key}(x_2)$
für alle $x_1 \in T_1$ und $x_2 \in T_2$.
2. Erzeuge Element x mit $\text{key}(x)=k$ und $\text{prio}(x) = -\infty$.
3. Erzeuge Treap T mit Wurzel x , linkem Teilbaum T_1 und
rechtem Teilbaum T_2 .
4. Entferne x aus T .

Lemma: Die Operationen **Vereinige** und **Spalte** haben eine erwartete Laufzeit von $O(\log n)$.

Prioritäten aus $[0,1)$

Prioritäten werden nur im direkten Vergleich benutzt, um zu entscheiden, welches Element die kleinere Priorität hat.

Tritt Gleichheit auf, so würfele für beide Prioritäten weitere Bits aus, bis sie verschieden sind.

$$p_1 = 0,010111001$$

$$p_2 = 0,010111001$$

$$p_1 = 0,010111001011$$

$$p_2 = 0,010111001010$$