Algorithmentheorie

02 - Polynomprodukt und Fast Fourier Transformation

Prof. Dr. S. Albers

1. Polynome

Reelles Polynom p **in einer Variablen** x

$$p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0$$

$a_0, ..., a_n \in R$, $a_n \neq 0$: Koeffizienten von p

Grad von p: höchste Potenz in p $(= n)$

Beispiel:

$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$

Menge aller reellen Polynome: $R[x]$

2. Operationen auf Polynomen

$p,q \in R[x]$

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$
$$q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

1. Addition

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \left(a_n x^n + \ldots + a_0\right) + \left(b_n x^n + \ldots + b_0\right) \\ &= \left(a_n + b_n\right)x^n + \ldots + \left(a_1 + b_1\right)x^1 + \left(a_0 + b_0\right) \end{aligned}$$

Operationen auf Polynomen

2. Produkt

$$p(x)q(x) = (a_n x^n + \ldots + a_0)(b_n x^n + \ldots + b_0)$$
$$= c_{2n} x^{2n} + \ldots + c_1 x^1 + c_0$$

c_i: Welche Monomprodukte haben Grad i?

$$\Rightarrow c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \quad i = 0,\ldots,2n.$$

$$a_{n+1} = \ldots = a_{2n} = 0, b_{n+1} = \ldots = b_{2n} = 0$$

Polynomring *R[x]*

Operationen auf Polynomen

3**. Auswerten an der Stelle x_0:** **Horner-Schema**

$$p(x_0) = (\ldots(a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + \ldots + a_1)x_0 + a_0$$

Zeit: O(n)

3. Repräsentation eines Polynoms

p(x) $\in$ *R[x]*

Möglichkeit zur Repräsentation von *p(x)*:

1. Koeffizientendarstellung

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

Beispiel:

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$$

Repräsentation eines Polynoms

2. Nullstellenprodukt

p(x) ∈ R[x]

$$p(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Beispiel:

$$p(x) = 3x(x-2)(x-3)$$

Repräsentation eines Polynoms

3. Punkt/Wertdarstellung

Interpolationslemma

Jedes Polynom p(x) aus *R[x]* vom Grad *n* ist eindeutig bestimmt durch *n*+1 Paare $(x_i, p(x_i))$, mit $i = 0,\ldots,n$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

Beispiel:

Das Polynom

$$p(x) = 3x(x-2)(x-3)$$

wird durch die Paare (0,0), (1,6), (2,0), (3,0) eindeutig festgelegt.

Operationen auf Polynomen

$p, q \in R[x]$, Grad(p) = Grad(q) = n

- **Koeffizientendarstellung**

  Addition: O(n)

  Produkt: O(n^2)

  Auswertung an der Stelle x_0: O(n)

- **Punkt/Wertdarstellung**

$$p = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

$$q = (x_0, z_0), (x_1, z_1), \ldots, (x_n, z_n)$$

Operationen auf Polynomen

Addition:

$$p+q=(x_0,y_0+z_0),(x_1,y_1+z_1),\ldots,(x_n,y_n+z_n)$$

Zeit: O(*n*)

Produkt:

$$p\cdot q=(x_0,y_0\cdot z_0),(x_1,y_1\cdot z_1),\ldots,(x_n,y_n\cdot z_n)$$

(Voraussetzung: $n \geq$ Grad(pq))

Zeit: O(n)

Auswerten an der Stelle *x´:* ??

Umwandeln in Koeffizientendarstellung

(Interpolation)

Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome *p, q* vom Grade < *n*

p,q Grad *n-1*, *n* Koeffizienten

$\downarrow$ **Auswertung:** $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$

2n Punkt/Wertpaare $(x_i, p(x_i))$ und $(x_i, q(x_i))$

$\downarrow$ **Punktweise Multiplikation**

2n Punkt/Wertpaare $(x_i, pq(x_i))$

$\downarrow$ **Interpolation**

pq Grad *2*n*-2*, *2*n*-1* Koeffizienten

Ansatz für Divide and Conquer

Idee: (*n* sei gerade)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\
&= a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + \\
&\quad a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\
&= a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} \left(x^2\right)^{(n-2)/2} + \\
&\quad x\left(a_1 + a_3 x^2 + \ldots + a_{n-1} \left(x^2\right)^{(n-2)/2}\right) \\
&= p_0\left(x^2\right) + x p_1\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= a_0 + a_2 x + \ldots + a_{n-2} x^{(n-2)/2} \\
p_1(x) &= a_1 + a_3 x + \ldots + a_{n-1} x^{(n-2)/2}
\end{aligned}
$$

Wähle $x_0, \ldots, x_{2n-1}$, so dass Berechnung von $p(x_k)$ und $p(x_{k+n})$ fast identisch.

Repräsentation von *p(x)*

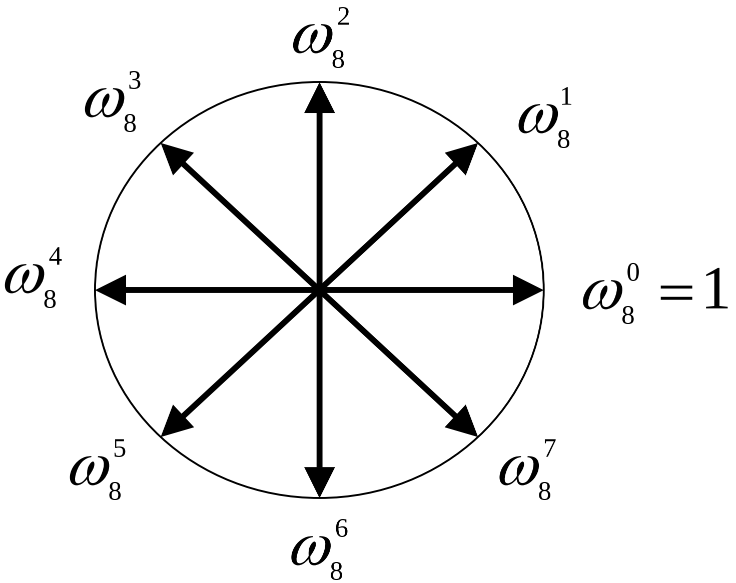
Annahme: Grad(*p*) < *n*

3a. **Werte an den n Potenzen der n-ten komplexen Haupteinheitswurzel** $\omega_n = e^{2\pi i/n}$

$i = \sqrt{-1} \qquad e^{2\pi i} = 1$

Potenz von ω_n (Einheitswurzeln):

1 = $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$



Diskrete Fourier Transformation

Werte von *p* für die *n* Potenzen von ω_n legen *p* eindeutig fest, falls Grad(*p*)<*n*.

Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$DFT_n(p) = \left(p\left(\omega_n^0\right), p\left(\omega_n^1\right), \ldots, p\left(\omega_n^{n-1}\right)\right)$$

Beispiel: *n*=4

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

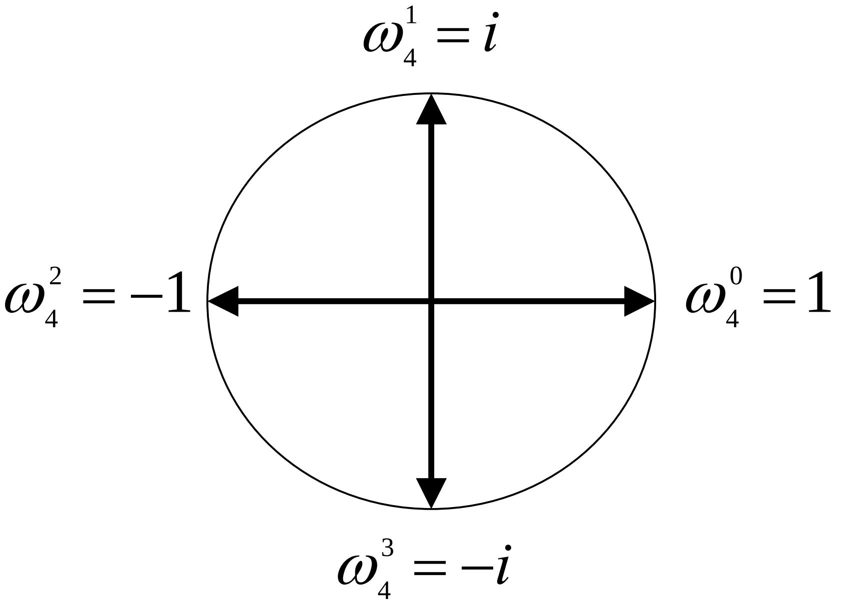
$$\omega_4^0 = e^{0i} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$\omega_4^1 = e^{2\pi i/4} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$$

$$\omega_4^2 = \left(e^{2\pi i/4}\right)^2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\omega_4^3 = \left(e^{2\pi i/4}\right)^3 = \cos\left(3\pi/2\right) + i \sin\left(3\pi/2\right) = -i$$

Auswertung an den Einheitswurzeln



Auswertung an den Einheitswurzeln

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x$$

$$\left(\omega_4^0, p\left(\omega_4^0\right)\right) = \left(1, p(1)\right) = \left(1,6\right)$$

$$\left(\omega_4^1, p\left(\omega_4^1\right)\right) = \left(i, p(i)\right) = \left(i, 15 + 15i\right)$$

$$\left(\omega_4^2, p\left(\omega_4^2\right)\right) = \left(-1, p(-1)\right) = \left(-1, -36\right)$$

$$\left(\omega_4^3, p\left(\omega_4^3\right)\right) = \left(-i, p(-i)\right) = \left(-i, 15 - 15i\right)$$

$$DFT_4(p) = \left(6, 15+15i, -36, 15-15i\right)$$

Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome *p, q* vom Grade < *n*

p,q Grad *n-1*, *n* Koeffizienten

Auswertung: $\omega_{2n}^{0}, \omega_{2n}^{1}, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$

$2n$ Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^{i}, p\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$ und $\left(\omega_{2n}^{i}, q\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$

Punktweise Multiplikation

$2n$ Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^{i}, pq\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$

Interpolation

pq Grad *2n-2*, *2n-1* Koeffizienten

4. Eigenschaften der Einheitswurzel

$\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$ bilden eine multiplikative Gruppe

Kürzungslemma
Für alle $n > 0$, $0 \leq k \leq n$, und $d > 0$ gilt:

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$

Beweis:

$$\omega_{dn}^{dk} = e^{2\pi i dk/(dn)} = e^{2\pi ik/n} = \omega_n^k$$

Folge: $\omega_{2n}^n = \omega_2^1 = -1$

Eigenschaften der Einheitswurzel

Halbierungslemma

Die Menge der Quadrate der 2*n* komplexen 2*n*-ten Einheitswurzeln

$$\left\{ \left(\omega_{2n}^{0}\right)^2, \left(\omega_{2n}^{1}\right)^2, \ldots, \left(\omega_{2n}^{2n-1}\right)^2 \right\}$$

ist gleich der Menge der *n* komplexen *n*-ten Einheitswurzeln

$$\left\{ \omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1} \right\}$$

Beweis:

$$\left(\omega_{2n}^{k}\right)^2 = \omega_{2n}^{2k} = \omega_n^k$$

$$\underbrace{\left(\omega_{2n}^{0}\right)^2}_{\omega_n^0}, \underbrace{\left(\omega_{2n}^{1}\right)^2}_{\omega_n^1}, \ldots, \underbrace{\left(\omega_{2n}^{k}\right)^2}_{\omega_n^k}, \ldots, \underbrace{\left(\omega_{2n}^{n+k}\right)^2}_{\omega_n^{n+k} = \omega_n^n \omega_n^k = \omega_n^k}, \ldots,$$

Eigenschaften der Einheitswurzel

Summationslemma

Für alle $n > 0$, $j \geq 0$ mit $n \nmid j$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^j\right)^k = \frac{\left(\omega_n^j\right)^n - 1}{\omega_n^j - 1} = \frac{\left(\omega_n^n\right)^j - 1}{\omega_n^j - 1} = 0$$

5. Diskrete Fourier Transformation

$$DFT_n(p) = \left(p\left(\omega_n^0\right), p\left(\omega_n^1\right), \ldots, p\left(\omega_n^{n-1}\right)\right)$$

Fast Fourier Transformation:

Berechnung von $DFT_n(p)$ mittels
eines Divide-and-Conquer Ansatzes

Diskrete Fourier Transformation

Idee: (*n* sei gerade)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\
&= a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + \\
&\quad a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\
&= a_0 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} \left(x^2\right)^{(n-2)/2} + \\
&\quad x\left(a_1 + a_3 x^2 + \ldots + a_{n-1} \left(x^2\right)^{(n-2)/2}\right) \\
&= p_0\left(x^2\right) + x p_1\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

$$p_0(x) = a_0 + a_2 x \ + \ldots + a_{n-2} x^{(n-2)/2}$$

$$p_1(x) = a_1 + a_3 x + \ldots + a_{n-1} x^{(n-2)/2}$$

Diskrete Fourier Transformation

Auswertung für $k = 0, \ldots, n-1$

$$p(\omega_n^k) = p_0\left((\omega_n^k)^2\right) + \omega_n^k p_1\left((\omega_n^k)^2\right) = \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}) \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} DFT_n(p) &= (p_0(\omega_{n/2}^0), \ldots, p_0(\omega_{n/2}^{n/2-1}), p_0(\omega_{n/2}^0), \ldots, p_0(\omega_{n/2}^{n/2-1})) \\ &+ (\omega_n^0 p_1(\omega_{n/2}^0), \ldots, \omega_n^{n/2-1} p_1(\omega_{n/2}^{n/2-1}), \\ &\quad \omega_n^{n/2} p_1(\omega_{n/2}^0), \ldots, \omega_n^{n-1} p_1(\omega_{n/2}^{n/2-1})) \end{aligned}$$

Diskrete Fourier Transformation

Beispiel:

$$p(\omega_4^0) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^1) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

$$p(\omega_4^2) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^2 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^3) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^3 p_1(\omega_2^1)$$

Berechnung von DFT_n

$$DFT_n(p) = \left(p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})\right)$$

Einfachster Fall: $n = 1$ (Grad(p) = n –1 = 0)

$DFT_1(p) = a_0$

Sonst :

Divide:

Teile p in p_0 und p_1 auf

Conquer:

Berechne $DFT_{n/2}(p_0)$ und $DFT_{n/2}(p_1)$ rekursiv

Merge:

Berechne für k = 0, ... , n –1:

$$DFT_n(p)_k = (DFT_{n/2}(p_0), DFT_{n/2}(p_0))_k + \omega_n^k \cdot (DFT_{n/2}(p_1), DFT_{n/2}(p_1))_k$$

Eine kleine Verbesserung

Beispiel:

$$p(\omega_4^0) = p_0(\omega_2^0) + \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^1) = p_0(\omega_2^1) + \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

$$p(\omega_4^2) = p_0(\omega_2^0) - \omega_4^0 p_1(\omega_2^0)$$

$$p(\omega_4^3) = p_0(\omega_2^1) - \omega_4^1 p_1(\omega_2^1)$$

Eine kleine Verbesserung

$$p(\omega_n^k) = \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}) \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k), \\ \text{falls } k < n/2 \\ p_0(\omega_{n/2}^{k-n/2}) - \omega_n^{k-n/2} p_1(\omega_{n/2}^{k-n/2}), \\ \text{falls } k \geq n/2 \end{cases}$$

Also falls $k < n/2$:

$$p_0(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k) = p(\omega_n^k)$$
$$p_0(\omega_{n/2}^k) - \omega_n^k p_1(\omega_{n/2}^k) = p(\omega_n^{k+n/2})$$

6. Fast Fourier Transformation

Algorithmus *FFT*

Input: Ein Array a mit den n Koeffizienten eines Polynoms p und $n = 2^k$

Output: $DFT_n(p)$

1. **if** $n = 1$ **then** /* *p ist konstant* */
2. **return** a
3. $d^{[0]} = FFT([a_0, a_2, \dots , a_{n-2}], n/2)$
4. $d^{[1]} = FFT([a_1, a_3, \dots , a_{n-1}], n/2)$
5. $\omega_n = e^{2\pi i/n}$
6. $\omega = 1$
7. **for** $k = 0$ **to** $n/2 - 1$ **do** /* $\omega = \omega_n^k$ */
8. $d_k = d_k^{[0]} + \omega \cdot d_k^{[1]}$
9. $d_{k+n/2} = d_k^{[0]} - \omega \cdot d_k^{[1]}$
10. $\omega = \omega_n \cdot \omega$
11. **return** d

FFT : Beispiel

$$p(x) = 3x^3 - 15x^2 + 18x + 0$$

a = [0, 18,-15, 3]

$a^{[0]}$ = [0, -15] $a^{[1]}$ = [18, 3]

FFT([0, -15], 2) = (FFT([0],1) + FFT([-15],1), FFT([0],1) - FFT([-15],1))

= (-15,15)

FFT([18, 3],2) = (FFT([18],1) + FFT([3],1), FFT([18],1) - FFT([3],1))

= (21,15)

$k = 0$; $\omega = 1$

$d_0 = -15 + 1 * 21 = 6$ $d_2 = -15 – 1 * 21 = -36$

$k = 1$; $\omega = i$

$d_1 = 15 + i*15$ $d_3 = 15 – i*15$

FFT(a, 4) = (6, 15+15i, -36, 15 –15i)

7. Analyse

T(n) = Zeit um ein Polynom vom Grad < n an den Stellen

$\omega_{2n}^{0}, \omega_{2n}^{1}, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$ auszuwerten.

T(1) = O(1)

T(n) = 2 T(n/2) + O(n)

= O(n log n)

Polynomprodukt

Berechnung des Produkts zweier Polynome *p, q* vom Grade < *n*

p,q Grad *n-1*, *n* Koeffizienten

$\downarrow$ **Auswertung durch FFT:** $\omega_{2n}^0, \omega_{2n}^1, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$

$2n$ Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^i, p\left(\omega_{2n}^i\right)\right)$ und $\left(\omega_{2n}^i, q\left(\omega_{2n}^i\right)\right)$

$\downarrow$ **Punktweise Multiplikation**

$2n$ Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^i, pq\left(\omega_{2n}^i\right)\right)$

$\downarrow$ **Interpolation**

pq Grad $2n$-2, $2n$-1 Koeffizienten

Interpolation

Umrechnung der Punkt/Wert-Darstellung in die Koeffizientendarstellung

Gegeben: $(x_0, y_0),\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ mit $x_i \neq x_j$, für alle $i \neq j$

Gesucht: Polynom p mit Koeffizienten $a_0,\ldots, a_{n-1}$,
so dass

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} &&= y_0 \\
p(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} &&= y_1 \\
p(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} &&= y_2 \\
&\vdots && \vdots \\
p(x_{n-1}) &= a_0 + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} &&= y_{n-1}
\end{aligned}$$

Interpolation

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Interpolation

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist lösbar für $x_i \neq x_j$, für alle $i \neq j$

Spezialfall (hier) : $x_i = \omega_n^i$

Definition:

$$V_n = \left(\omega_n^{ij}\right)_{i,j}, \quad a = (a_i), \quad y = (y_i)$$

$$\mathrm{V}_n a = y \quad \Rightarrow \quad a = V_n^{-1} y$$

Interpolation

Satz

Für alle $0 \le i, j \le n - 1$ gilt:

$$\left(V_n^{-1}\right)_{ij} = \frac{\omega_n^{-ij}}{n}$$

Beweis

$$V_n^{-1} = \left(\frac{\omega_n^{-ij}}{n}\right)_{i,j}$$

zu zeigen:

$$V_n^{-1} V_n = I_n$$

Interpolation

Betrachte Eintrag von $V_n^{-1} V_n$ in Zeile i, Spalte j:

$$\left(V_n^{-1} V_n\right)_{ij} =$$

$$\begin{pmatrix} & & \cdots & \\ \frac{1}{n} & \frac{\omega_n^{-i}}{n} & \cdots & \frac{\omega_n^{-i(n-1)}}{n} \\ & & \vdots & \\ & & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \omega_n^{j} & \cdots \\ \cdots & \omega_n^{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \omega_n^{(n-1)j} & \cdots \end{pmatrix}_{ij}$$

Interpolation

$$\left(V_n^{-1}V_n\right)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_n^{-ik}}{n}\omega_n^{jk} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(-i+j)k}$$

Fall 1: *i* = *j*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(-i+j)k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{0\cdot k} = 1$$

Fall 2: $i \neq j$, d.h. $-(n-1) \leq -i + j \leq n-1$ und damit $n \nmid -i + j$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{(-i+j)k} = 0$$

Interpolation

Summationslemma

Für alle $n > 0,\ j \geq 0$ mit $n \nmid j$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$$

Interpolation

$$a_i = \left(V_n^{-1} y\right)_i$$

$$= \left(\frac{1}{n}, \frac{\omega_n^{-i}}{n}, \ldots, \frac{\omega_n^{-i(n-1)}}{n}\right)\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\omega_n^{-ik}}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\omega_n^{-i}\right)^k$$

Interpolation

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\omega_n^{-0}\right)^k, \sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\omega_n^{-1}\right)^k, \cdots, \sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\omega_n^{-(n-1)}\right)^k\right)$$

$$r(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \cdots + y_{n-1} x^{n-1}$$

$$a = \frac{1}{n}\left(r\left(\omega_n^{-0}\right), r\left(\omega_n^{-1}\right), \ldots, r\left(\omega_n^{-(n-1)}\right)\right)$$

Interpolation und DFT

$$a = \frac{1}{n}\left(r\left(\omega_n^{-0}\right), r\left(\omega_n^{-1}\right), \ldots, r\left(\omega_n^{-(n-1)}\right)\right)$$

$$a = \frac{1}{n}\left(r\left(\omega_n^{n}\right), r\left(\omega_n^{n-1}\right), \ldots, r\left(\omega_n^{1}\right)\right)$$ denn $\omega_n^n = 1$

$$a_i = \frac{1}{n}(DFT_n(r))_{n-i} \qquad (i \neq 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{n}(DFT_n(r))_0$$

Polynomprodukt durch FFT

Berechnung des Produkts zweier Polynome *p, q* vom Grade < *n*

p,q Grad *n-1*, *n* Koeffizienten

$\downarrow$ **Auswertung durch FFT:** $\omega_{2n}^{0}, \omega_{2n}^{1}, \ldots, \omega_{2n}^{2n-1}$

2n Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^{i}, p\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$ und $\left(\omega_{2n}^{i}, q\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$

$\downarrow$ **Punktweise Multiplikation**

2n Punkt/Wertpaare $\left(\omega_{2n}^{i}, pq\left(\omega_{2n}^{i}\right)\right)$

$\downarrow$ **Interpolation durch FFT**

pq Grad *2n-2*, *2n-1* Koeffizienten