Union-Find-Strukturen

Prof. Dr. S. Albers

Union-Find Strukturen

Problem:

Verwaltung einer Familie von paarweise disjunkten Mengen unter den Operationen:

e.make-set():

Erzeugt eine neue Menge mit Element *e*.

e.find-set():

Liefert diejenige Menge M_i, die das Element e enthält.

Union-Find Strukturen

union(M_i, M_j):

Vereinigt die Mengen M_i und M_j zu einer neuen Menge.

Repräsentation der Mengen M_i :

M_i wird durch ein repräsentatives (kanonisches) Element aus M_i identifiziert.

Union-Find Strukturen

Operationen mit repräsentativen Elementen:

e.make-set():

Erzeugt eine neue Menge mit einzigem Element *e*. Die Menge wird durch *e* repräsentiert.

e.find-set():

Liefert den Namen des Repräsentanten derjenigen Menge, die das Element *e* enthält.

e.union(f):

Vereinigt die Mengen M_e und M_f , die die Elemente *e* und *f* enthalten zu einer neuen Menge *M* und liefert ein Element aus $M_e \cup M_f$ als Repräsentanten von *M*. M_e und M_f werden zerstört.

Folgerungen

- Ist n die Anzahl der *e.make-set()* Operationen und werden insgesamt m Operationen *e.make-set(), e.find-set(), e.union(f)* ausgeführt, so ist
  - *m >= n*
  - nach höchstens *(n – 1)* union – Operationen besteht die Kollektion von Mengen nur noch aus einer einzigen Menge

Anwendungs-Beispiel: Zusammenhangstest

Input: Graph $G = (V,E)$

Output: die Familie der Zusammenhangskomponenten von G

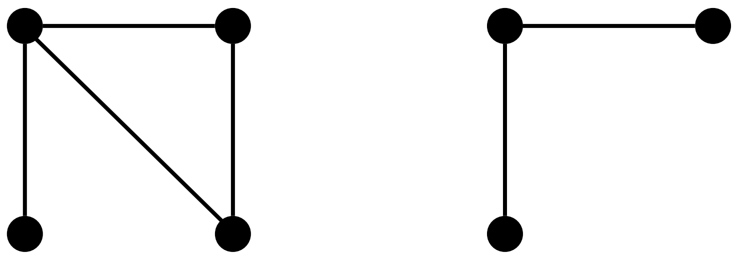
Algorithmus: Connected-Components

for all v **in** V **do** *v.makeset()*

for all (u,v) **in** E **do**

  if *u.findset()* $\neq$ *v.findset()*

    then *u.union(v)*

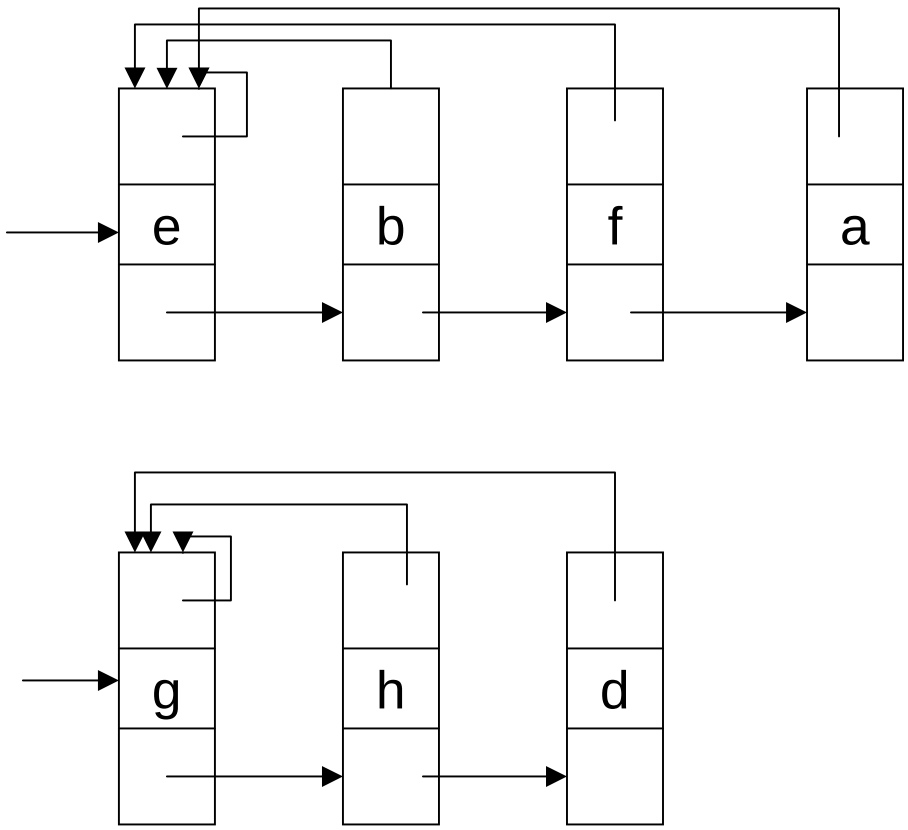


Same-Component (u,v):

  if *u.findset()* = *v.findset()*

  then return *true*

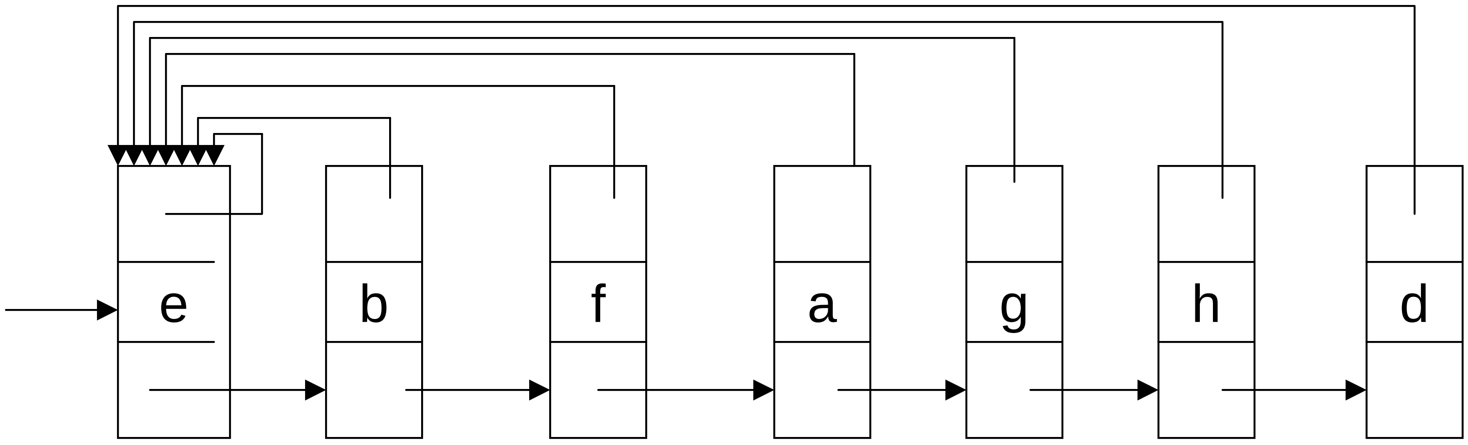
Repräsentation durch verkettete Listen



- *x.make-set()*
- *x.find-set()*
- *x.union(y)*

Repräsentation durch verkettete Listen

b.union(d)



Teure Operations-Folge

$e_1.make\text{-}set()$

$e_2.make\text{-}set()$

⋮

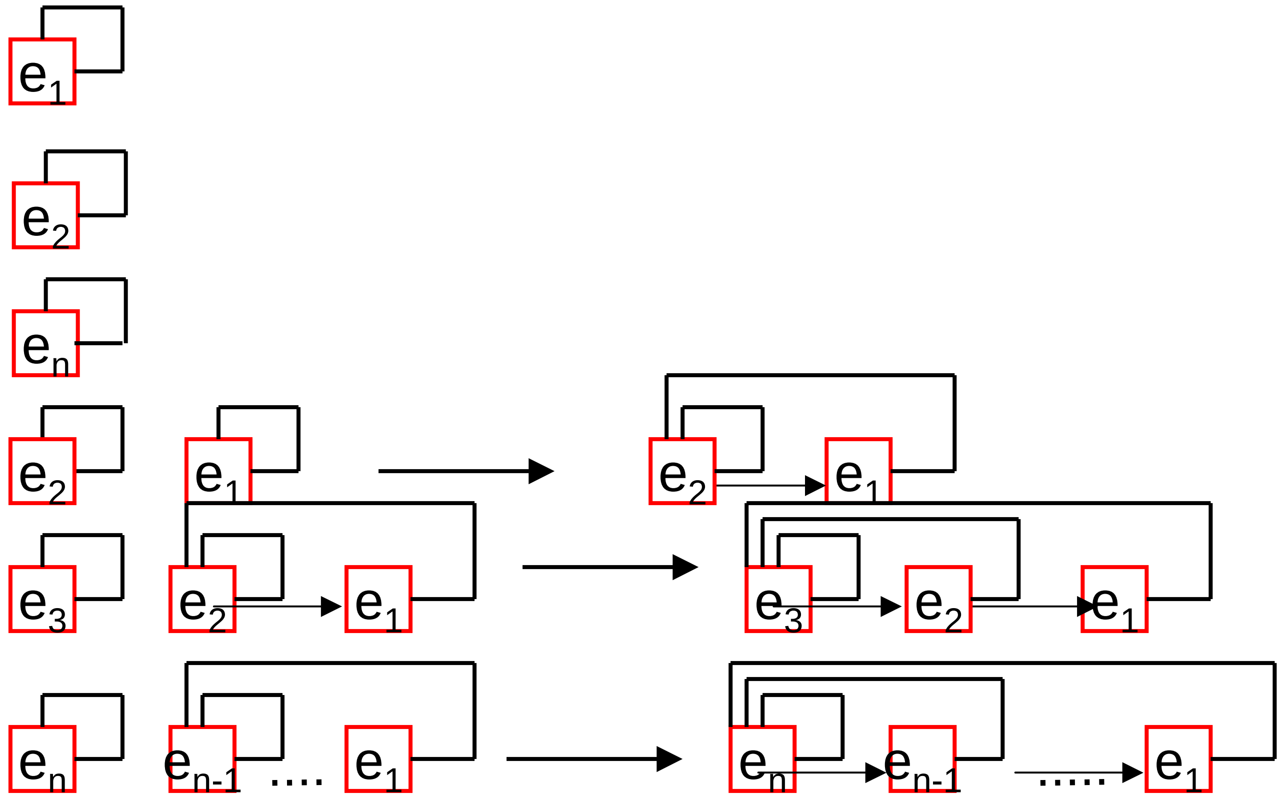
$e_n.make\text{-}set()$

$e_2.union(e_1)$

$e_3.union(e_1)$

⋮

$e_n.union(e_{n-1})$



Längere Liste wird stets an kurze angehängt!

Zeigerzuweisungen im i-ten Schritt $e_i.union(e_{i-1})$:

2n Operationen kosten Zeit:

Verbesserung

Gewichtete Union-Heuristik

Hänge stets die kürzere an die längere Liste.
(Führe Listenlänge als Parameter mit).

Satz

Bei Verwendung der gewichteten Union-Heuristik kann jede Folge von m *make-set(), find-set(),* und *union()*-Operationen, die höchstens n *make-set()* Operationen enthält, in Zeit $O(m + n \log n)$ ausgeführt werden.

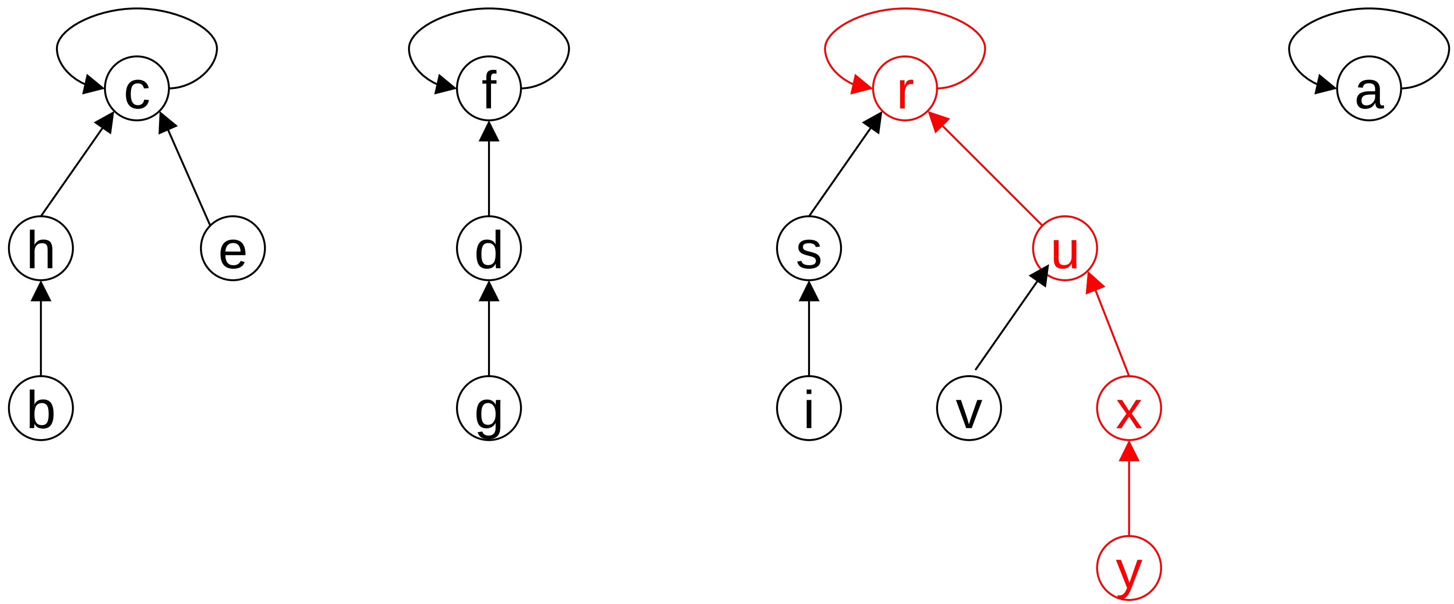
Beweis

Betrachte Element e

Anzahl der Änderungen des Zeigers von e auf das repräsentative Element:

$\log n$

Repräsentation durch Wald von Bäumen



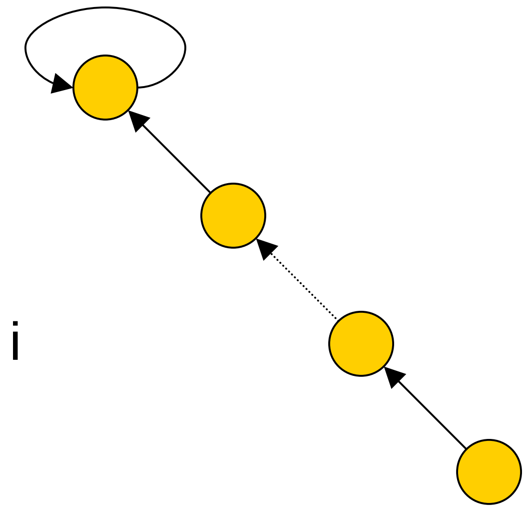
- a.make-set()
- y.find-set()
- d.union(e): mache den Repräsentanten der einen Menge (z.B. *f*) zum direkten Vater des Repräsentanten der anderen Menge.

Beispiel

m = Gesamtanzahl der Operationen ($\geq 2n$)

for $i = 1$ **to** n **do** e_i.*make-set( )*
for $i = 2$ **to** n **do** e_i.*union*(e_{i-1})
for $i = 1$ **to** f **do** e_1.*find-set( )*

i – ter Schritt



Kosten für f find-set Operationen: $O(f * n)$

Vereinigung nach Größe

zusätzliches Feld:

e.size = (#Knoten im Teilbaum von *e*)

e.make-set()

1 *e.parent* = *e*

2 *e.size* = 1

e.union(f)

1 *Link(e.find-set( ), f.find-set( ))*

Vereinigung nach Größe

Link(e,f)

```
if e.size ≥ f.size
    then f.parent = e
         e.size = e.size + f.size
    else /* e.size < f.size */
         e.parent = f
         f.size = e.size + f.size
```

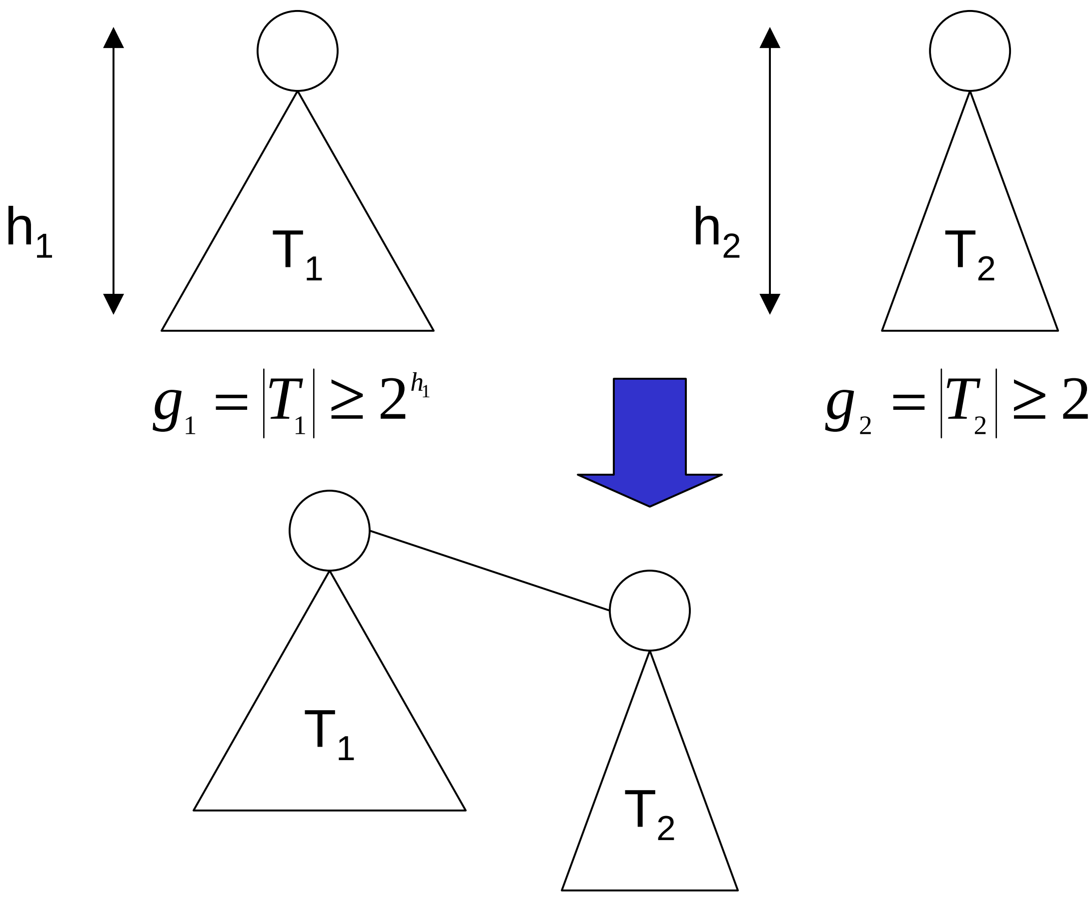
Vereinigung nach Größe

Satz

Das Verfahren Vereinigung nach Größe hat folgende Invariante:

Ein Baum mit Höhe *h* hat wenigstens *2^h* Knoten

Beweis



$$g_1 = |T_1| \geq 2^{h_1}$$

$$g_2 = |T_2| \geq 2^{h_2}$$

Vereinigung nach Größe

Fall 1: Der neue Baum ist genauso hoch wie T_1

$$g_1 + g_2 \ge g_1 \ge 2^{h_1}$$

Fall2 : Der neue Baum ist gewachsen

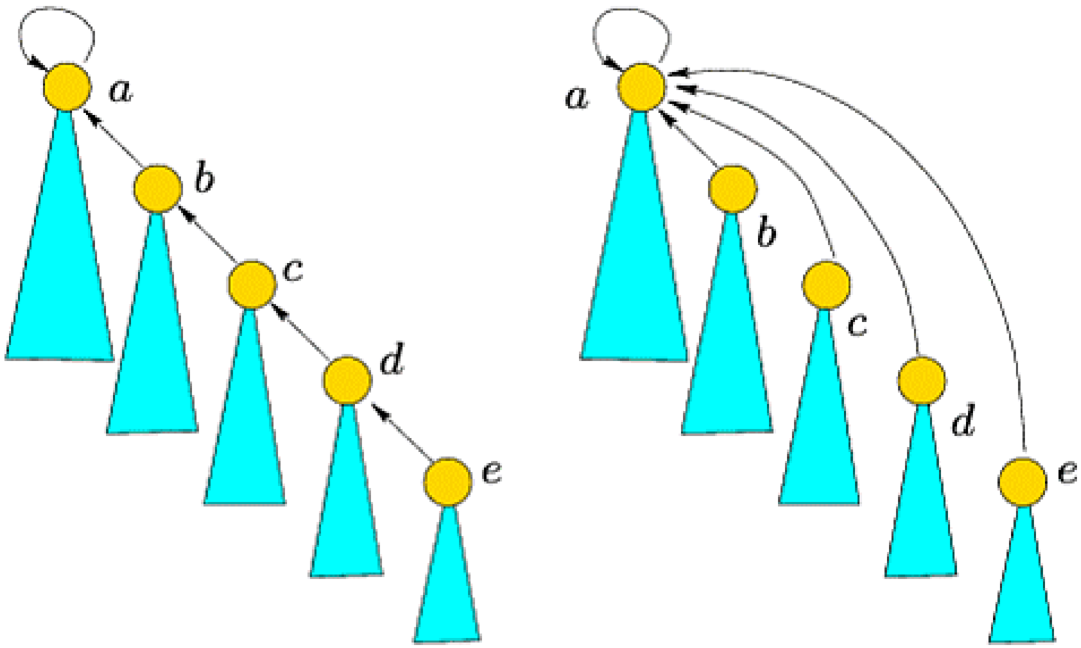
Höhe von *T*: $h_2 + 1$

$$g = g_1 + g_2 \ge 2^{h_2} + 2^{h_2} = 2^{h_2+1}$$

Konsequenz

Eine *find-set*-Operation kostet höchsten O(*log n*) viele Schritte, falls die Anzahl der *make-set*-Operationen gleich *n* ist.

Pfadverkürzung bei Find-Operation



e.find-set()

```
if e ≠ e.parent
    then e.parent = e.parent.find-set( )
return
```

Analyse der Laufzeit

m Gesamtanzahl der Operationen, davon

f *find-Set*-Operation und
n *make-Set*-Operation.
→ höchstens $n - 1$ *union*-Operationen

Vereinigung nach Größe:
$O(n + f \log n)$

Find-Operation mit Pfadverkürzung:
Falls $f < n$, $\Theta(n + f \log n)$
Falls $f \geq n$, $\Theta(f \log_{1+f/n} n)$

Analyse der Laufzeit

Satz (Vereinigung nach Größe und Pfadverkürzung)

Bei der Verwendung der Strategie *Vereinigung nach Größe* und *Pfadverkürzung* benötigen m Union-Find-Operation über n Elementen $\Theta(m * \alpha(m,n))$ Schritte.

$\alpha(m,n)$ = Inverse der Ackermann-Funktion

Ackermann-Funktion und Inverse

Ackermann-Funktion

$A(1,j) = 2^j$ für $j \geq 1$

$A(i,1) = A(i - 1,2)$ für $i \geq 2$

$A(i,j) = A(i - 1, A(i, j - 1))$ für $i,j \geq 2$

Inverse Ackermann-Funktion

$$\alpha(m,n) = \min\{i \geq 1 \mid A(i, \lfloor m/n \rfloor) > \log n\}$$

Ackermann-Funktion und Inverse

$$A(i, \lfloor m/n \rfloor) \geq A(i,1)$$

$$A(2,1) = A(1,2) = 2^2 = 4$$

$$A(3,1) = A(2,2) = A(1, A(2,1)) = 2^4 = 16$$

$$A(4,1) = A(3,2) = A(2, A(3,1)) = A(2,16)$$

$$\geq 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{65536}$$

$$\alpha(m,n) \leq 4, \text{ für } \log n < 2^{65536}$$