# Greedy Verfahren

Prof. Dr. S. Albers

# Greedy Verfahren

1. Allgemeine Vorbemerkungen
2. Einfache Beispiele
   - Münzwechselproblem
   - Handlungsreisenden-Problem
3. Das Aktivitäten Auswahlproblem

# Greedy Verfahren zur Lösung eines Optimierungsproblems

Treffe in jedem Verfahrensschritt diejenige Entscheidung, die im Moment am besten ist!

**Möglichkeiten:**

1. Wir erhalten stets die optimale Gesamtlösung.

2. Wir erhalten eine Lösung, die zwar nicht immer optimal ist, aber vom Optimum stets nur wenig abweicht.

3. Die berechnete Lösung kann beliebig schlecht werden.

# Einfache Beispiele: Münzwechsel-Problem

**EUR Bargeld-Werte:**

500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1

**Beobachtung**

Jeder EUR Betrag kann durch Münzen und Banknoten mit diesen Werten bezahlt werden.

**Ziel**

Bezahlung eines Betrages $n$ mit möglichst wenig Münzen und Banknoten

## Greedy-Verfahren

Wähle die maximale Zahl von Banknoten und Münzen mit jeweils größtmöglichem Wert, bis der gewünschte Betrag $n$ erreicht ist.

**Beispiel:** $n = 487$

500 200 100 50 20 10 5 2 1

# Allgemeines Münzwechselproblem

**Werte von Münzen und Banknoten:** $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$n_1 > n_2 > \ldots > n_k$, und $n_k = 1$.

**Greedy Zahlungsverfahren:**

1. $w = n$
2. **for** $i = 1$ **to** $k$ **do**

   **# Münzen mit Wert** $m_i = \lfloor w/n_i \rfloor$

   $w = w - m_i \lfloor w/n_i \rfloor$

**Jeder Geldbetrag kann bezahlt werden!**

# Land Absurdia

**Drei Münzen:**

$n_3 = 1, n_2 > 1$ *beliebig*, $n_1 = 2 n_2 + 1$

**Beispiel:** 41, 20, 1

Zu zahlender Betrag: $n = 3 n_2$ (z.B. $n = 60$)

**Optimale Zahlungsweise:**

**Greedy Zahlungsverfahren:**

# Handlungsreisenden-Problem (TSP)

**Gegeben:** $n$ Orte und Kosten $c(i,j)$, um von $i$ nach $j$ zu reisen

**Gesucht:** Eine billigste Rundreise, die alle Orte genau einmal besucht.

**Formal:** Eine Permutation $p$ von $\{1, 2, ..., n\}$, so dass

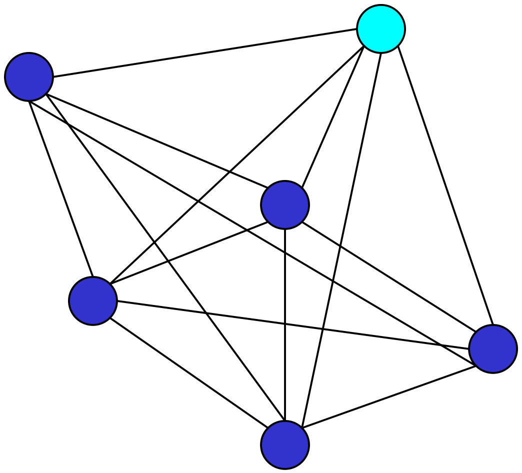
$$c(p(1),p(2)) + \cdots + c(p(n-1),p(n)) + c(p(n),p(1))$$

minimal ist.

# Handlungsreisenden-Problem (TSP)

## Greedy Verfahren zur Lösung von TSP

Beginne mit Ort 1 und gehe jeweils zum nächsten bisher noch nicht besuchten Ort. Wenn alle Orte besucht sind, kehre zum Ausgangsort 1 zurück.



# Handlungsreisenden-Problem (TSP)

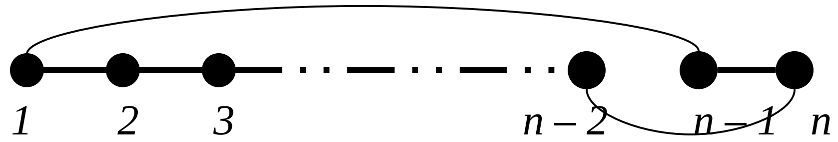
**Beispiel**

$c(i,i+1) = 1$, für $i = 1, ..., n - 1$

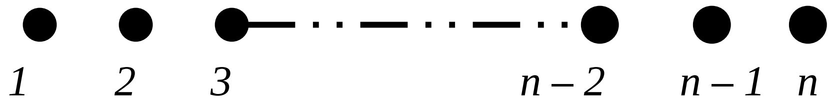
$c(n,1) = M$ (für eine sehr große Zahl $M$)

$c(i,j) = 2$, sonst

**Optimale Tour:**




**Vom Greedy Verfahren berechnete Tour:**



# Das Aktivitäten-Auswahl-Problem

**Gegeben:**

$S = \{a_1,...,a_n\}$ , Menge von $n$ Aktivitäten,die alle eine Ressource benötigen, z.B. einen Hörsaal.

Aktivität $a_i$: Beginn $b_i$ und Ende $e_i$

Aktivitäten $a_i$ und $a_j$ heißen kompatibel, falls

$$[b_i, e_i) \cap [b_j, e_j) = \emptyset$$

**Gesucht:**

Eine größt mögliche Menge paarweise kompatibler Aktivitäten.

**Annahme:**

Aktivitäten sind nach aufsteigender Zeit des Endes sortiert:

$$e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq ... \leq e_n$$

## Greedy Strategie zur Lösung des Aktivitäten-Auswahl-Problems:

Wähle immer die Aktivität mit frühestem Endzeitpunkt, die legal eingeplant werden kann!

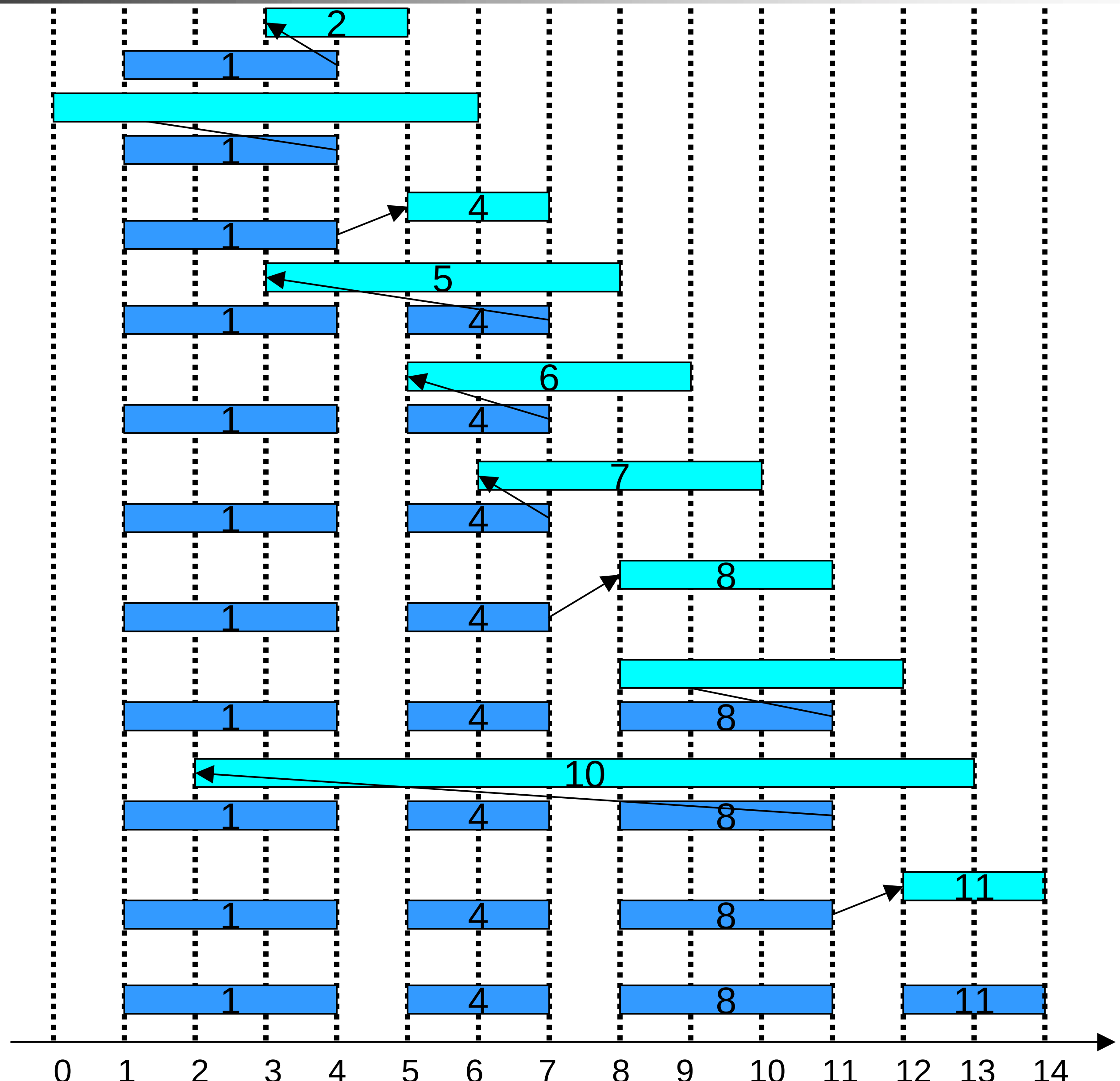
Insbesondere ist die erste gewählte Aktivität die mit frühestem Endzeitpunkt.

**Satz**

**Das Greedy Verfahren zur Auswahl der Aktivitäten liefert eine optimale Lösung des Aktivitäten Auswahl Problems.**

# Das Aktivitäten Auswahl Problem

| $b_i$ | $e_i$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 5 |
| 0 | 6 |
| 5 | 7 |
| 3 | 8 |
| 5 | 9 |
| 6 | 10 |
| 8 | 11 |
| 8 | 12 |
| 2 | 13 |
| 12 | 14 |



# Aktivitäten Auswahl

**Algorithmus** *Greedy-Aktivitäten*

**Input:** $n$ Aktivitätenintervalle $[b_i, e_i)$, $1 \le i \le n$ mit $e_i \le e_{i+1}$ ;

**Output:** Eine maximal große Menge von paarweise kompatiblen Aktivitäten;

$A_1 = \{a_1\}$

$last = 1$

**for** $i = 2$ **to** $n$ **do**

/* $last$ ist die zuletzt zu $A_{i-1}$ hinzugefügte Aktivität */

**if** $b_i < e_{last}$

**then** $A_i = A_{i-1}$

**else** /* $b_i \ge e_{last}$ */

$A_i = A_{i-1} \cup \{a_i\}$

$last = i$

**return** $A_m$

Laufzeit: $O(n)$

# Aktivitäten Auswahl

**Invarianten:**

1. Es gilt:

$$e_{last} = \max \{ e_k \mid a_k \in A_i \}$$

2. Es gibt eine optimale Lösung $A^*$ mit

$$A^* \cap \{a_1, \ldots, a_i\} = A_i$$

# Optimalität des Greedy-Verfahrens

**Satz**

Das Greedy Verfahren zur Auswahl der Aktivitäten liefert eine optimale Lösung des Aktivitäten Auswahl Problems.

**Beweis**

Wir zeigen: Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

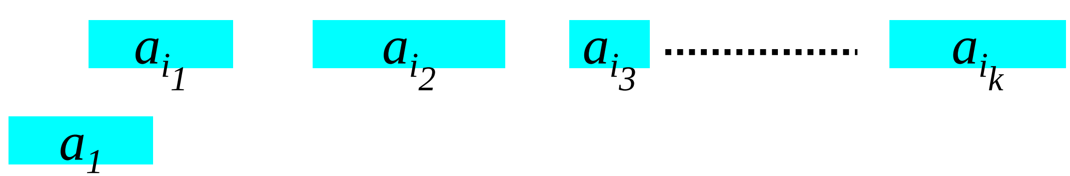
Es gibt eine optimale Lösung A* mit

$$A^* \cap \{a_1, \ldots, a_i\} = A_i$$

$i = 1$:

Wähle $A^* \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A^*$ ist optimal, $A^* = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$

$A^* =$



# Optimalität des Greedy-Verfahrens

$i - 1 \rightarrow i$:

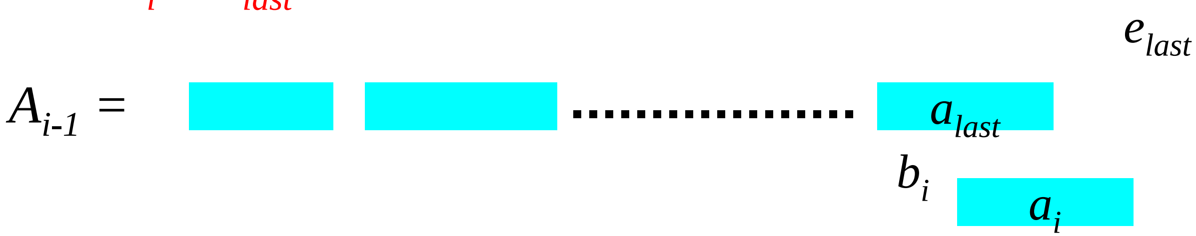
wähle $A^* \subseteq \{a_1,\ldots,a_n\}$, $A^*$ ist optimal mit $A^* \cap \{a_1,\ldots,a_{i-1}\} = A_{i-1}$
betrachte $R = A^* \setminus A_{i-1}$

**Beobachtung**

$R$ ist eine optimale Lösung für die Menge der Aktivitäten in $\{a_i,\ldots,a_n\}$, die zu den Aktivitäten in $A_{i-1}$ kompatibel sind.

# Optimalität des Greedy-Verfahrens

**Fall 1:** $b_i < e_{last}$



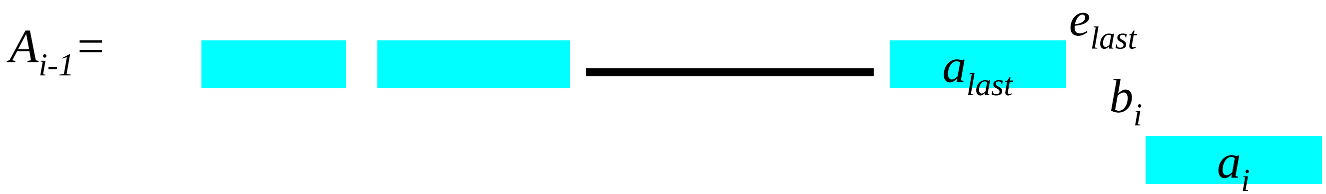

$a_i$ **ist nicht kompatibel zu** $A_{i-1}$

$a_i$ **ist nicht in** $R$ **enthalten und auch nicht in** $A^*$

$$A^* \cap \{a_1,\ldots,a_i\} = A_{i-1} = A_i$$

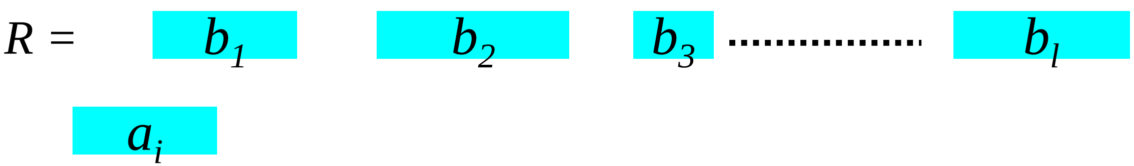
# Optimalität des Greedy-Verfahrens

**Fall 2:** $b_i \geq e_{last}$




$a_i$ **ist kompatibel zu** $A_{i-1}$

**Es gilt:** $R \subseteq \{a_i,\ldots,a_n\}$




$B^* = A_{i-1} \cup (R \setminus \{b_1\}) \cup \{a_i\}$ **ist optimal**

$B^* \cap \{a_1,\ldots,a_i\} = A_{i-1} \cup \{a_i\} = A_i$

# Greedy Verfahren

**Greedy-Wahl Eigenschaften:**

Wenn man optimale Teillösung hat und man trifft eine lokal optimale Wahl, dann gibt es eine global optimale Lösung, die diese Wahl enthält.

**Optimalität von Teillösungen:**

Eine Teillösung einer optimalen Lösung ist eine optimale Lösung des Teilproblems.

→ nach jeder lokal optimalen Wahl erhalten wir ein zur Ausgangssituation analoges Problem