Algorithmentheorie

06 – Amortisierte Analyse

Prof. Dr. S. Albers

Amortisierung

- Betrachte eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n Operation auf Datenstruktur D

- T_i = Ausführungszeit von a_i

- $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, Gesamtlaufzeit

- Oft kann die Laufzeit einer einzelnen Operation in einem großen Bereich schwanken, z. B. in

  $1,\ldots,n$,

  aber nicht bei allen Operationen der Folge kann der schlechteste Fall auftreten

Analyse von Algorithmen

- Best Case
- Worst Case
- Average Case
- Amortisierte Worst Case

Was sind die durchschnittlichen Kosten einer Operation in einer schlechtest möglichen Folge von Operationen?

Amortisierung

Idee:

- Zahle für billige Operation etwas mehr
- Verwende Erspartes um für teure Operationen zu zahlen

Drei Methoden:

1. Aggregatmethode
2. Bankkonto – Methode
3. Potentialfunktion – Methode

1.Aggregat – Methode: Dualzähler

Bestimmung der Bitwechselkosten eines Dualzählers

Operation	Zählerstand	Kosten
	00000	
1	00001	1
2	00010	2
3	00011	1
4	00100	3
5	00101	1
6	00110	2
7	00111	
8	01000	
9	01001	
10	01010	
11	01011	
12	01100	
13	01101	

2. Bankkonto – Methode

Beobachtung:

In jedem Schritt wird genau eine 0 in eine 1 verwandelt

Idee:

Bezahle zwei KE für das Verwandeln einer 0 in eine 1

→ jede 1 hat eine KE auf dem Konto

Bankkonto – Methode

Operation	Zählerstand
	0 0 0 0 0
1	0 0 0 0 1
2	0 0 0 1 0
3	0 0 0 1 1
4	0 0 1 0 0
5	0 0 1 0 1
6	0 0 1 1 0
7	0 0 1 1 1
8	0 1 0 0 0
9	0 1 0 0 1
10	0 1 0 1 0

3. Potentialfunktion

Potentialfunktion ϕ

Datenstruktur $D \rightarrow \phi(D)$

t_l = wirkliche Kosten der l-ten Operation

ϕ_l = Potential nach Ausführung der l-ten Operation (= $\phi(D_l)$)

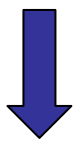
a_l = amortisierte Kosten der l-ten Operation

Definition:

$$a_l = t_l + \phi_l - \phi_{l-1}$$

Beispiel: Dualzähler

D_i = Stand nach der i-ten Operation
$\phi_i = \phi(D_i)$ = # von Einsen in D_i

i–te Operation	# von Einsen
D_{i-1}: .....0/1.....01.....1	B_{i-1}
	
D_i : .....0/1.....10.....0	$B_i = B_{i-1} - b_i + 1$

t_i = **wirkliche Bitwechselkosten von Operation *i***
= b_i+1

Dualzähler

t_i = wirkliche Bitwechselkosten von Operation i
a_i = amortisierte Bitwechselkosten von Operation i

$$
\begin{aligned}
a_i &= (b_i + 1) + (B_{i-1} - b_i + 1) - B_{i-1} \\
&= 2 \\
&\Rightarrow \sum t_i \leq 2n
\end{aligned}
$$

Dynamische Tabellen

Problem:
Verwaltung einer Tabelle unter den Operationen Einfügen und Entfernen, so dass

- die Tabellengröße der Anzahl der Elemente angepasst werden kann
- immer ein konstanter Anteil der Tabelle mit Elementen belegt ist
- die Kosten für *n* Einfüge- oder Entferne–Operationen *O(n)* sind.

Organisation der Tabelle: Hashtabelle, Heap, Stack, etc.

Belegungsfaktor α_T: Anteil der Tabellenplätze von T, die belegt sind.

Implementation Einfügen

```
class dynamic table {

    int [] table;

    int size;                  // Größe der Tabelle
    int num;                   // Anz. der Elemente

dynamicTable() {               // Initialisierung der leeren Tabelle
    table = new int [1];
    size = 1;
    num = 0;
    }
```

Implementation Einfügen

```
insert ( int x) {
    if (num == size ) {
        new Table = new int [2*size];
        for (i = 0; i < size; i++)
            füge table[i] in newTable ein;
        table = newTable;
        size = 2*size;
    }
    füge x in table ein;
    num = num + 1;
}
```

Kosten von n Einfüge-Operationen in eine anfangs leere Tabelle

t_i = Kosten der *i*-ten Einfüge-Operation

Worst case:

t_i = 1, falls die Tabelle vor der Operation i nicht voll ist
$t_i = (i - 1) + 1$, falls die Tabelle vor der Operation i voll ist.

Also verursachen *n* Einfüge-Operationen höchstens Gesamtkosten von

$$\sum_{i=1}^{n}(i) = O(n^2)$$

Amortisierter Worst-Case:
Aggregat -, Bankkonto -, Potential-Methode

Potential-Methode

T Tabelle mit

- *k* = *T.num* Elemente
- *s* = *T.size* Größe

Potentialfunktion

$$\phi(T) = 2k - s$$

Potential-Methode

Eigenschaften

- $\phi_0 = \phi(T_0) = \phi$ (leere Tabelle) = -1

- Unmittelbar vor einer Tabellenexpansion ist $k = s$,
  also $\phi(T) = k = s$.

- Unmittelbar nach einer Tabellenexpansion ist $k = s/2$,
  also $\phi(T) = 2k - s = 0$.

- Für alle $i \geq 1$: $\phi_i = \phi(T_i) > 0$
  Da $\phi_n - \phi_0 \geq 0$, gilt

$$\sum t_i \leq \sum a_i$$

Berechnung der amortisierten Kosten a_i der i-ten Einfüge-Operation

k_i = # Elemente in T nach der i-ten Operation

s_i = Tabellengröße von T nach der i-ten Operation

Fall 1: *i*-te Operation löst keine Expansion aus

$$k_i = k_{i-1} + 1,\ s_i = s_{i-1}$$

$$\begin{aligned} a_i &= 1 + (2k_i - s_i) - (2k_{i-1} - s_{i-1}) \\ &= 1 + 2(k_i - k_{i-1}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Fall 2: *i*-te Operation löst Expansion aus

$k_i = k_{i-1} + 1,\ s_i = 2s_{i-1}$

$a_i = k_{i-1} + 1 + (2k_i - s_i) - (2k_{i-1} - s_{i-1})$

$= 3$

Einfügen und Entfernen von Elementen

Jetzt: Kontrahiere Tabelle, wenn Belegung zu gering!

Ziele:

(1) Belegungsfaktor bleibt durch eine Konstante nach unten beschränkt

(2) amortisierte Kosten einer einzelnen Einfüge- oder Entferne-Operation sind konstant.

1. Versuch

- Expansion: wie vorher
- Kontraktion: Halbiere Tabellengröße, sobald Tabelle weniger als ½ voll ist!

„Schlechte“ Folge von Einfüge- und Entfernenoperationen

		Kosten
n/2 mal Einfügen (Tabelle voll)		3 *n/2*
I: Expansion		*n/2* + 1
D, D: Kontraktion		*n/2* + 1
I, I : Expansion		*n/2* + 1
D, D: Kontraktion		

Gesamtkosten der Operationsfolge:
$I_{n/2}$, *I,D,D,I,I,D,D*,... der Länge *n* sind

2. Versuch

Expansion: Verdoppele die Tabellengröße, wenn in die volle Tabelle eingefügt wird.

Kontraktion: Sobald der Belegungsfaktor unter ¼ sinkt , halbiere die Tabellengröße.

Folgerung: Die Tabelle ist stets wenigstens zu ¼ voll, d.h.

$$¼ \leq \alpha(T) \leq 1$$

Kosten einer Folge von Einfüge- und Entferne-Operationen?

Analyse Einfügen und Entfernen

k = T.num, s = T.size, α *= k/s*

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Analyse Einfügen und Entfernen

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Unmittelbar nach einer Expansion oder Kontraktion der Tabelle:

$s = 2k$, also $\phi(T) = 0$

Einfügen

i-te Operation: $k_i = k_{i-1} + 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} \geq ½$

Fall 2: $\alpha_{i-1} < ½$

Fall 2.1: $\alpha_i < ½$

Fall 2.2: $\alpha_i \geq ½$

Einfügen

Fall 2.1: $\alpha_{i-1} < ½$, $\alpha_i < ½$ (keine Expansion)

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Einfügen

Fall 2.2: $\alpha_{i-1} < ½,\ \alpha_i \geq ½$ (keine Expansion)

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Entfernen

$k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} < ½$

Fall 1.1: Entfernen verursacht keine Kontraktion

$s_i = s_{i-1}$

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Entfernen

$k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} < ½$

Fall 1.2: $\alpha_{i-1} < ½$ Entfernen verursacht Kontraktion

$s_i = s_{i-1}/2 \quad k_{i-1} = s_{i-1}/4$

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Entfernen

Fall 2: $\alpha_{i-1} \geq ½$ keine Kontraktion

$s_i = s_{i-1}$ $k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 2.1: $\alpha_i \geq ½$

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Entfernen

Fall 2: $\alpha_{i-1} \geq ½$ keine Kontraktion

$s_i = s_{i-1}$ $k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 2.2: $\alpha_i < ½$

Potentialfunktion ϕ

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$