Algorithmentheorie

13 – Bin Packing

Prof. Dr. S. Albers

Bin Packing

1. Problembeschreibung und einfache Beobachtungen

2. Approximative Lösung des Online Bin Packing Problems

3. Approximative Lösung des Offline Bin Packing Problems

Problembeschreibung

Gegeben:

n Objekte der Größen

$$s_1, \ldots, s_n$$

mit $0 < s_i \leq 1$, für $1 \leq i \leq n$.

Gesucht:

Die kleinst mögliche Anzahl von Kisten (Bins) der Größe 1, mit der alle Objekte verpackt werden können.

Beispiel:

7 Objekte mit Größen 0.2, 0.5, 0.4, 0.7, 0.1, 0.3, 0.8

Problembeschreibung

Online Bin Packing:

Jedes (ankommende) Objekt muss verpackt sein, bevor das nächste Objekt betrachtet wird. Ein Objekt verbleibt in derjenigen Kiste, in die es zuerst gepackt wird.

Offline Bin Packing:

Zunächst wird die Anzahl n und alle n Objekte vorgegeben. Dann beginnt die Verpackung.

Beobachtung

- Bin Packing ist beweisbar schwer.
  (Offline Version ist NP-schwer.
  Entscheidungsproblem ist NP-vollständig.)

- Kein Online Bin Packing Verfahren kann stets eine optimale Lösung liefern

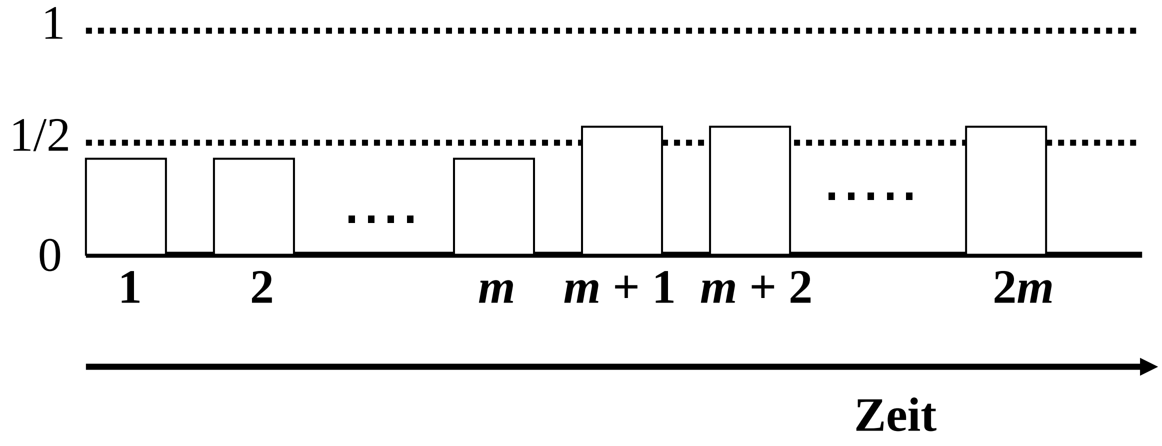
Online Verfahren

Satz 1

Es gibt Eingaben, die jeden Online Bin Packing Algorithmus zwingen, wenigstens *4/3* OPT Bins zu verwenden, wobei OPT die minimal mögliche Binzahl ist.

Beweis:

Annahme: Online Bin Packing Algorithmus A benötigt stets weniger als *4/3* OPT Bins



Online Verfahren

Zeitpunkt 1:

$OPT = m/2$ und $\#\text{Bins}(A) = b$

Es gilt nach Annahme: $b < 4/3 \cdot m/2 = 2/3m$

Sei $b = b_1 + b_2$, wobei

b_1 = #Bins mit einem Objekt

b_2 = #Bins mit zwei Objekten

Es gilt: $b_1 + 2\,b_2 = m$, d.h. $b_1 = m - 2b_2$

und damit $b = b_1 + b_2 = m - b_2$ $\quad(*)$

Online Verfahren

Zeitpunkt 2:

$OPT = m$

#Bins(A) $\geq b + m - b_1 = m + b_2$

Annahme: $m + b_2 \leq$ #Bins(A) $< 4/3m$

$b_2 < m/3$

$\Longrightarrow$ mit (*): $b = m - b_2 > 2/3m$

Online Verfahren

Next Fit (NF), First-Fit (FF), Best-Fit (BF)

Next Fit:

Verpacke das nächste Objekt in dieselbe Kiste wie das vorherige, wenn es dort noch hineinpasst, sonst öffne eine neue Kiste und verpacke es dort.

Satz 2

(a) Für alle Inputfolgen I gilt:

$$NF(I) \leq 2OPT(I).$$

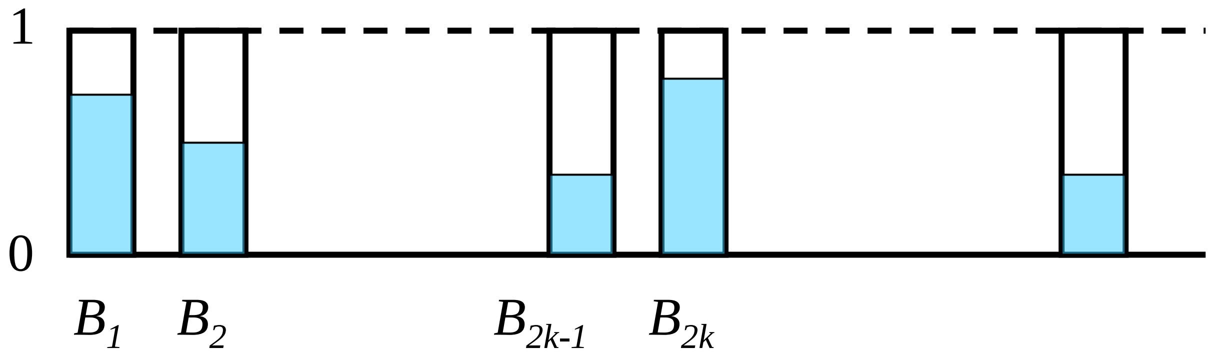
(b) Es gibt Inputfolgen I mit:

$$NF(I) \geq 2OPT(I) - 2.$$

Next Fit

Beweis: (a)

Betrachte zwei Kisten B_{2k-1}, B_{2k}, $2k \leq NF(I)$.



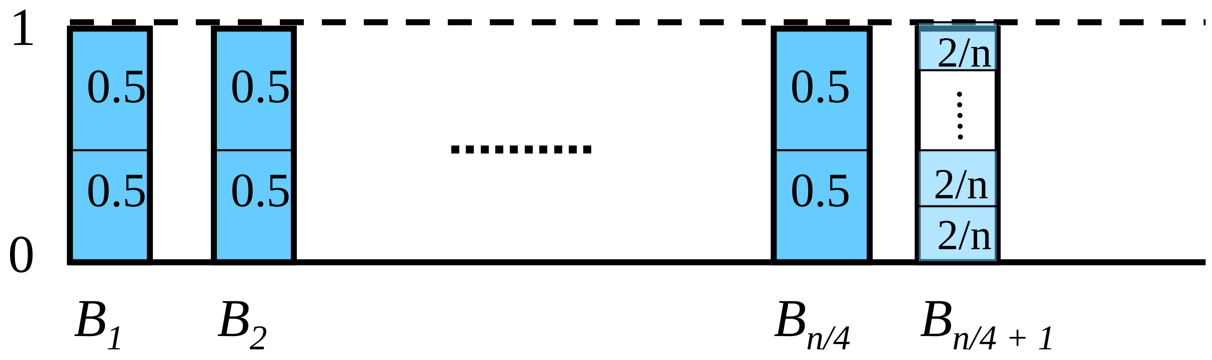
Next Fit

Beweis: (b)

Betrachte Inputfolge I mit Länge n
($n \equiv 0 \pmod 4$):

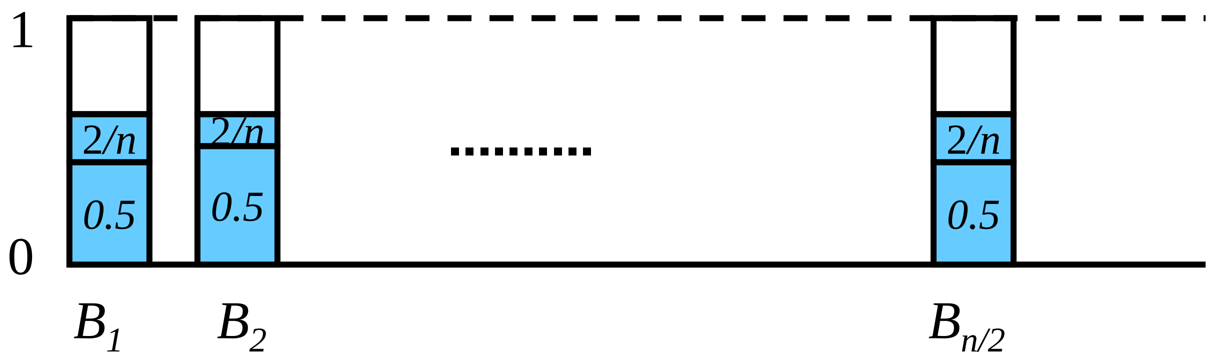
0.5, $2/n$, 0.5, $2/n$, 0.5, ... , 0.5, $2/n$

Optimale Packung:



Next Fit

Next Fit liefert:



$NF(I) =$

$OPT(I) =$

First Fit

First Fit:

Packe nächstes Objekt in die erste Kiste, in die es noch hineinpasst, wenn es eine solche Kiste gibt, sonst in eine neue Kiste.

Beobachtung:

Zu jedem Zeitpunkt kann es höchstens eine Kiste geben, die weniger als halb voll ist.

$\rightarrow FF(I) \leq 2OPT(I)$

First Fit

Satz 3

(a) Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FF(I) \leq \lceil 17/10\ OPT(I) \rceil$$

(b) Es gibt Inputfolgen I mit:

$$FF(I) \geq 17/10\ (OPT(I) - 1)$$

(b´) Es gibt Inputfolgen I mit:

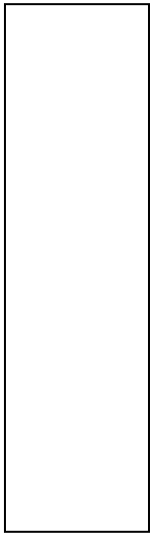
$$FF(I) = 10/6\ OPT(I)$$

First Fit

Beweis (b`): Inputfolge der Länge $3 \cdot 6m$

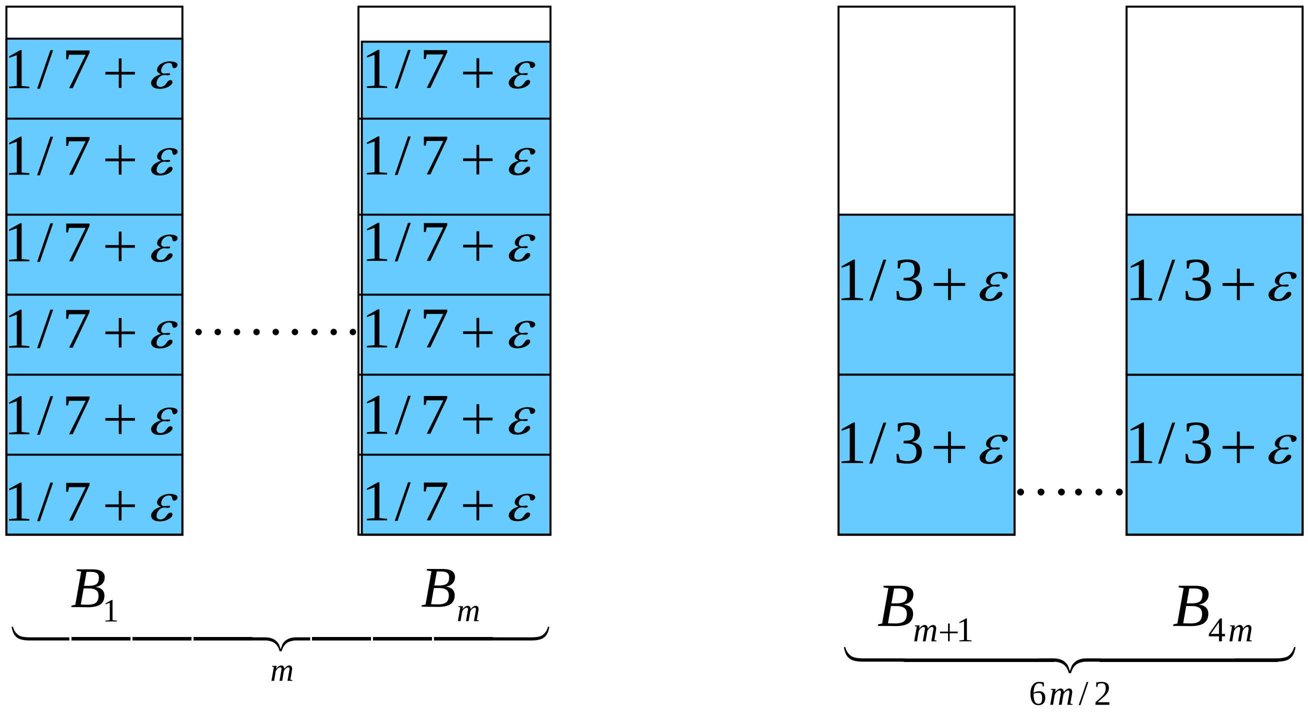
$$\underbrace{1/7+\varepsilon,\ldots,1/7+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/3+\varepsilon,\ldots,1/3+\varepsilon}_{6m},$$

$$\underbrace{1/2+\varepsilon,\ldots,1/2+\varepsilon}_{6m}$$

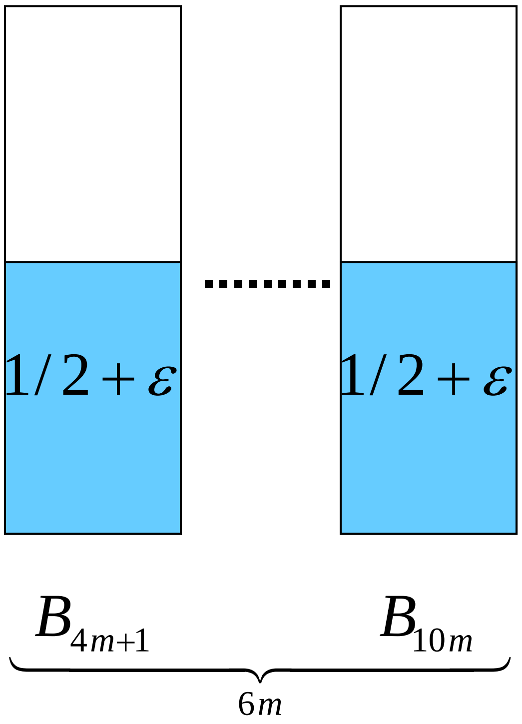


First Fit

First-Fit liefert:



First Fit



Best Fit

Best Fit:

Verpacke das nächste Objekt in diejenige Kiste, in die es am besten passt (d.h. den geringsten Platz ungenutzt lässt).

Verhalten von BF ähnlich zu FF

Laufzeit für Inputfolgen der Länge n

NF O(n)

FF O(n^2) $\longrightarrow$ O(n log n)

BF O(n^2) $\longrightarrow$ O(n log n)

Off-line Verfahren

n und $s_1, \ldots, s_n$ sind gegeben, bevor die Verpackung beginnt

Optimale Packung kann durch erschöpfende Suche bestimmt werden.

Idee für off-line Approximationsalgorithmus:
Sortiere die Objekte zunächst nach abnehmender Größe und verpacke größere Objekte zuerst!

First Fit Decreasing (FFD) bzw. **FFNI**
Best Fit Decreasing (BFD)

First Fit Decreasing

Lemma 1

Sei I eine Folge von n Objekten mit Größen

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots\ldots \geq s_n$$

und sei $m = OPT(I)$.

Dann haben alle von FFD in den Bins

$$B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots, B_{FFD(I)}$$

verpackten Objekte eine Größe von höchstens 1/3.

First Fit Decreasing

Lemma 2

Sei I eine Folge von n Objekten mit Größen

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots\ldots \geq s_n$$

und sei $m = OPT(I)$.

Dann ist die Anzahl der Objekte, die FFD in die Kisten

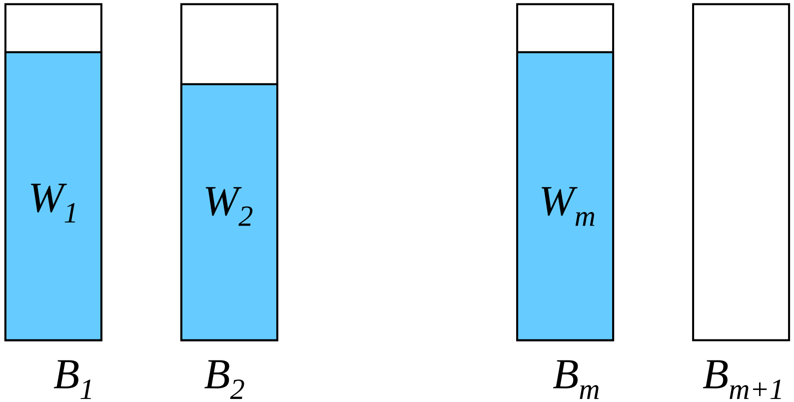
$$B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots , B_{FFD(I)}$$

verpackt, höchstens $m - 1$.

First Fit Decreasing

Beweis:

Annahme: Es gibt mehr als $m - 1$ Objekte $x_1, \ldots, x_m$ in I, die FFD in extra Kisten verpackt.



First Fit Decreasing

Satz

Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FFD(I) \leq (4\,OPT(I) + 1)/3.$$

Satz

1. Für alle Inputfolgen I gilt:

$$FFD(I) \leq 11/9\,OPT(I) + 4.$$

2. Es gibt Inputfolgen I mit:

$$FFD(I) = 11/9\,OPT(I).$$

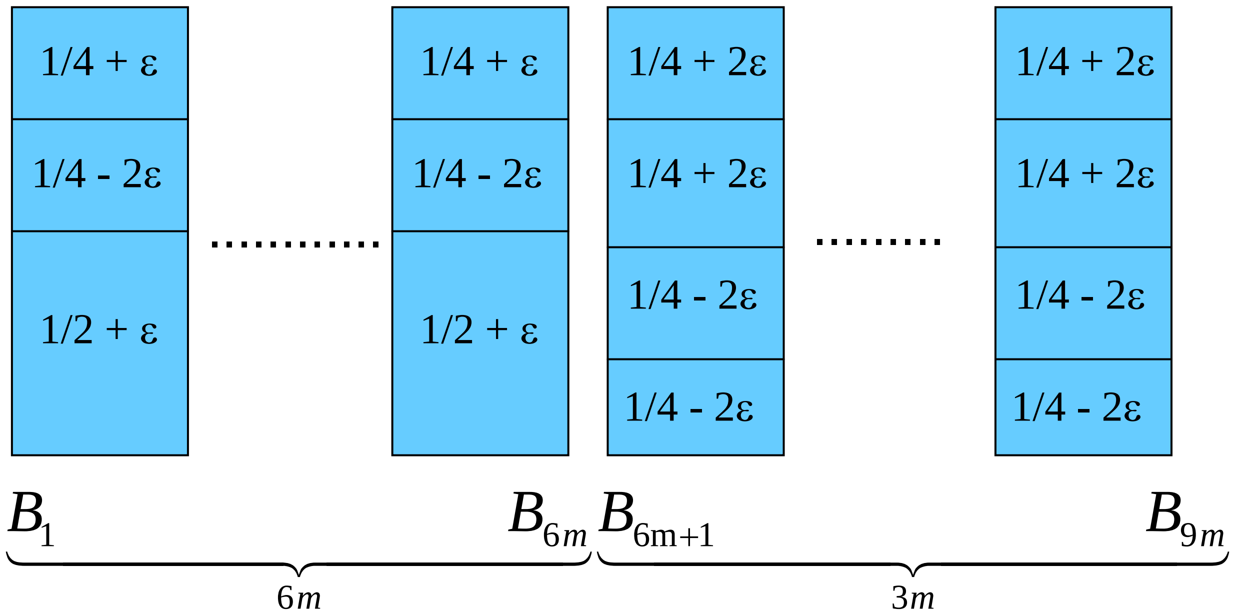
First Fit Decreasing

Beweis (b): Inputfolge der Länge $3 \cdot 6m + 12m$

$$\underbrace{1/2+\varepsilon,\ldots,1/2+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/4+2\varepsilon,\ldots,1/4+2\varepsilon}_{6m}$$

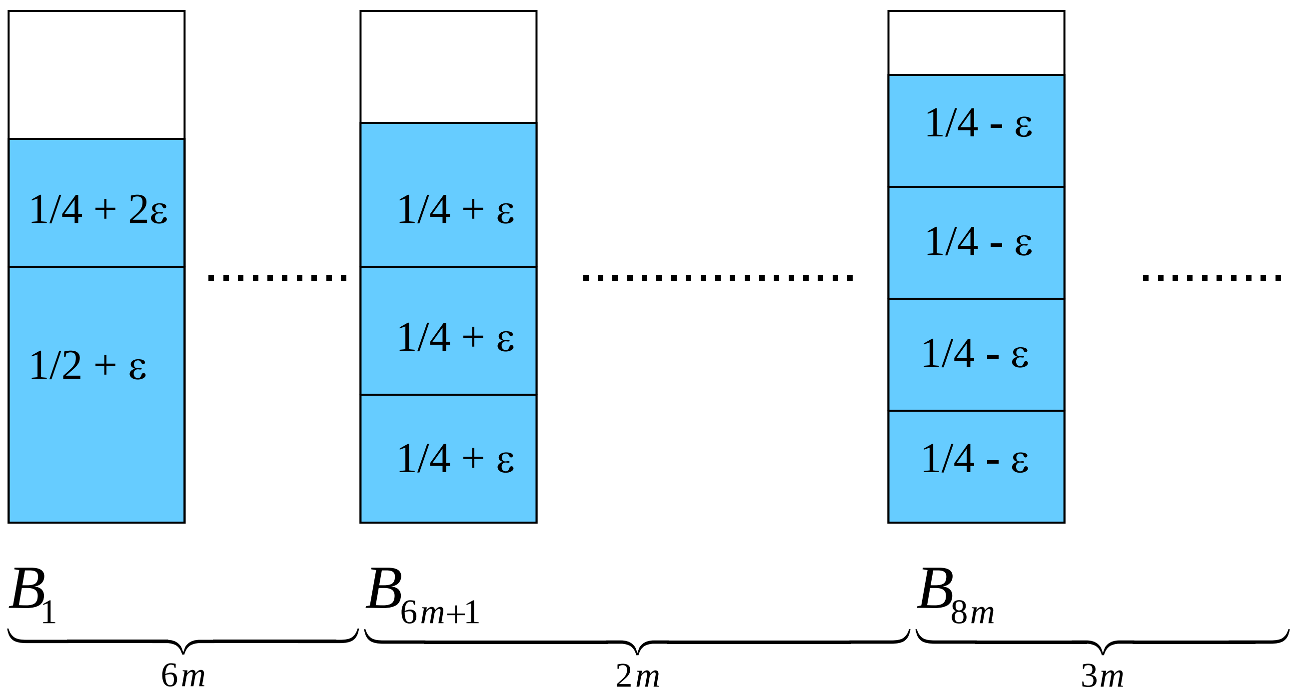
$$\underbrace{1/4+\varepsilon,\ldots,1/4+\varepsilon}_{6m},\underbrace{1/4-2\varepsilon,\ldots,1/4-2\varepsilon}_{12m}$$

Optimale Packung:



First Fit Decreasing

First Fit Decreasing liefert:



$$OPT(I) = 9m$$
$$FFD(I) = 11m$$