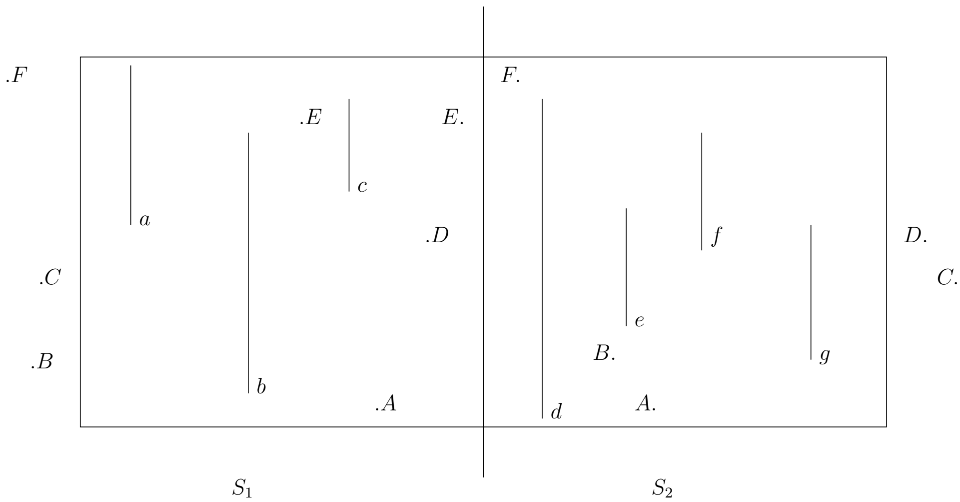
Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. S. Albers
M. Schmidt, S. Scholz Freiburg i. Br., den 24. Oktober 2005

Algorithmentheorie WS 05/06
Übungsblatt 1

Abgabe bis Montag, 7. November 2005, 12 Uhr,
in die Kästen im Gebäude 051

Aufgabe 1: Kleinste und größte Zahl (5 Punkte)
Gegeben sei eine Menge $S = \{x_1, \ldots, x_n\}, n = 2^i, i \in \mathbb{N}, i \geq 1$, natürlicher Zahlen. Gesucht sind das kleinste und das größte Element in S. Wie viele Vergleiche sind hierzu bei einem iterativen Ansatz nötig? Entwickeln Sie mittels des Divide-and-Conquer-Konzepts einen Algorithmus, der für die Bestimmung der beiden Werte höchstens $\frac{3}{2}n - 2$ Vergleiche benötigt. Beweisen Sie jeweils die Aussagen über die Anzahl der Vergleiche.

Aufgabe 2: Geometrisches Divide-and-Conquer (5 Punkte)
Gegeben seien die vertikalen Segmente $a, \ldots, g$ sowie die durch ihre linken und rechten Endpunkte repräsentierten horizontalen Segmente $A, \ldots, F$. Durch (wiederholte) Aufteilung der Menge infolge rekursiver Aufrufe des Divide-and-Conquer-Verfahrens zur Bestimmung aller Liniensegmentschnitte sind folgende Mengen S_1 und S_2 entstanden. Es gilt $S_1 \cup S_2 = S$.



„$.P$" bezeichnet den linken Endpunkt, „$P.$" den rechten Endpunkt von P. Geben Sie die Rückgabewerte der beiden Aufrufe `ReportCuts(`S_1`)` und `ReportCuts(`S_2`)`, die in der Vorlesung definierten Mengen $L(S_1)$, $L(S_2)$, $R(S_1)$, $R(S_2)$, $V(S_1)$, $V(S_2)$, $L(S)$ und $R(S)$ sowie die im Merge-Schritt

noch zu berichtenden Segmentschnitte an. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Mengen den Rückgabewert des Aufrufs `ReportCuts(`S`)`.
Zur Notation: $L(S) = \{P | .P \in S \wedge P. \notin S\}$, $R(S) = \{P | .P \notin S \wedge P. \in S\}$ und $V(S) = \{p \in S\}$. Der Schnitt eines horizontalen Segmentes P und eines vertikalen Segmentes p wird durch das geordnete Paar (P, p) notiert. Die Menge `ReportCuts(`S`)` ist somit eine Menge geordneter Paare (P, p).

Aufgabe 3: Voronoi-Diagramm (5 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_2)$ der reellen Ebene mit euklidischem Abstand. Für $u \in \mathbb{R}^2$ und $r \geq 0$ sei $K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 : d_2(u, v) = r\}$ der Kreis mit Radius r um u. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge von Punkten. Zu einer Voronoi-Region $VR(p), p \in P$, definieren wir ihren Ankreis $A(p)$ vermöge $A(p) = K_{r_p}(p)$, wobei

$$r_p = \max\{r : K_r(p) \cap VR(p') = \emptyset \text{ für alle } p' \in P \setminus \{p\}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Voronoi-Regionen $VR(p), p \in P$, konvex sind.

b) Zeigen Sie, dass es, falls $|P| \geq 2$, zwei Punkte $p, p' \in P$ gibt, so dass die Ankreise $A(p)$ und $A(p')$ einander berühren, d.h. $A(p) \cap A(p') \neq \emptyset$.

c) Geben Sie eine Punktemenge $P, |P| \geq 2$, an, die einen Punkt p enthält, bei dem der Ankreis $A(p)$ der zugehörigen Voronoi-Region $VR(p)$ isoliert ist, also keinen anderen Ankreis berührt, d.h. $A(p) \cap A(p') = \emptyset$ für alle $p' \in P \setminus \{p\}$, und beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4: `FFT` (5 Punkte)
Gegeben seien die Polynome

$$P(x) = 4\,x + 3 \text{ und } Q(x) = 5\,x - 2.$$

Berechnen Sie das Produkt $P(x)Q(x)$ mittels der schnellen Fourier-Transformation und ihrer Inversen. Geben Sie dabei für die Aufrufe `FFT(`P`)` und `FFT(`Q`)` sämtliche Zwischenergebnisse der Rekursionsaufrufe vor dem Merge-Schritt an.