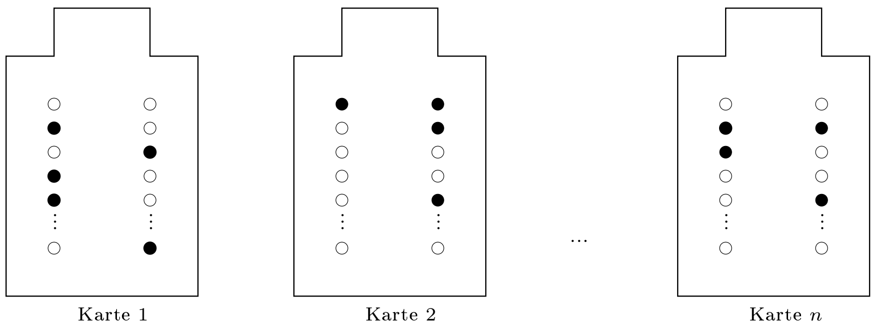
Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. S. Albers
G. Greiner, T. Jacobs

Übungen zur Vorlesung Informatik III
Freiburg i. Br., den 21. November 2008

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweis **5 Punkte**

Betrachten Sie das folgende Spiel: Gegeben ist eine Box mit rechteckigen Karten. Karten und Box haben jeweils links oben und rechts oben eine Einbuchtung, so dass es für jede Karte genau zwei Möglichkeiten gibt, sie in die Box zu legen. Auf jeder Karte befindet sich links und rechts jeweils eine Reihe runder Markierungen. Jede dieser Markierungen ist entweder ausgestanzt oder nicht. Ziel des Spiels ist es, die Karten so übereinander in die Box zu legen, dass deren Boden nicht mehr sichtbar ist.



Beweisen Sie, dass das Kartenproblem $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Dabei können Sie folgendermaßen vorgehen:

a) Zeigen Sie, dass das Kartenproblem in $\mathcal{NP}$ ist.

b) Geben Sie eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion f an, die jede Instanz I von SAT auf eine Instanz $f(I)$ des Kartenproblems abbildet, so dass I genau dann eine Lösung hat, wenn $f(I)$ eine Lösung hat. Beachten Sie, dass hierfür zwei Beweisrichtungen notwendig sind.

Aufgabe 2: Polynomialzeitreduktion **5 Punkte**

a) Die Entscheidungsvariante von Independent Set ist wie folgt definiert: Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$. Es soll entschieden werden, ob eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ existiert, so dass keine zwei Knoten in V' mit einer Kante verbunden sind.

   Zeigen Sie, dass Independent Set $\mathcal{NP}$-vollständig ist. **2 Punkte**

b) Die Entscheidungsvariante von Vertex Cover ist folgendermaßen definiert: Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$. Es soll entschieden werden, ob eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ existiert, so dass jede Kante in E zu mindestens einem Knoten aus V' inzident ist.

   Beweisen Sie, dass Vertex Cover $\mathcal{NP}$-vollständig ist, wobei z.B. Independent Set $\leq_p$ Vertex Cover gezeigt werden kann. **3 Punkte**

Aufgabe 3: 2-SAT **5 Punkte**

Im Gegensatz zu 3-Sat ist bekannt, dass das Problem 2-Sat, bei dem immer genau zwei Literale in jeder Klausel vorkommen, in $\mathcal{P}$ liegt. Beweisen Sie dies, indem Sie einen Polynomialzeitalgorithmus für 2-Sat angeben. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

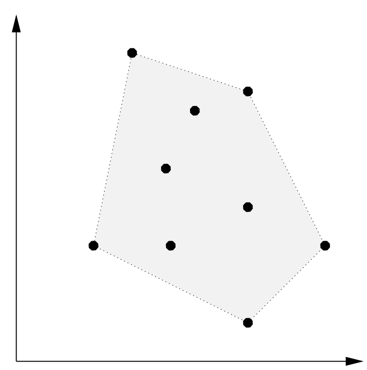
a) Beschreiben Sie formal einen Graphen, welcher alle Implikationen der 2-Sat-Instanz mit gerichteten Kanten darstellt. Beachten Sie, dass jede Klausel zu zwei Implikationen äquivalent ist. **1 Punkt**

b) Welche Bedingung für den resultierenden Graphen ist äquivalent dazu, dass die 2-Sat-Instanz lösbar ist? Beweisen Sie ihre Aussage. **3 Punkte**

c) Geben Sie einen Algorithmus an, welcher 2-Sat in Polynomialzeit löst. **1 Punkt**

Aufgabe 4: Lineare Reduktion **5 Punkte**

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in M$ auch jeder Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen x und y in M enthalten ist. Die *konvexe Hülle* einer Menge M ist der Schnitt aller konvexen Obermengen $M' \supseteq M$. Das Problem KH bezeichnet die Aufgabe, für eine gegebene endliche Menge von Punkten $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathbb{N}^2$ die Folge der Eckpunkte ihrer konvexen Hülle im Uhrzeigersinn zu berechnen (siehe Abbildung).



Beweisen Sie folgende Aussage: Kann KH von einer Registermaschine in Zeit $t(n)$ berechnet werden, so können n natürliche Zahlen von einer Registermaschine in Zeit $t(n) + O(n)$ sortiert werden. Gehen Sie dabei vom uniformen Kostenmaß aus.

Abgabe: Montag, 1. Dezember 2008, 16 Uhr, in den entsprechenden Briefkästen in Gebäude 051.

Die Übungsblätter können in Gruppen à maximal 2 Personen bearbeitet werden. Vermerken Sie die Namen und Matrikelnummern der an der Bearbeitung beteiligten Personen.

Beachten Sie bitte auch die aktuellen Hinweise unter

`www.informatik.uni-freiburg.de/~ipr` $\longrightarrow$ `Teaching` $\longrightarrow$ `Informatik III`