# Amortisierte Analyse

# Amortisierung

- Betrachte eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $n$ Operation auf Datenstruktur $D$

- $T_i$ = Ausführungszeit von $a_i$

- $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, Gesamtlaufzeit

- Oft kann die Laufzeit einer einzelnen Operation in einem großen Bereich schwanken, z. B. in

  $$1,\ldots,n,$$

  aber nicht bei allen Operationen der Folge kann der schlechteste Fall auftreten

# Analyse von Algorithmen

- Best Case
- Worst Case
- Average Case
- Amortisierte Worst Case

Was sind die durchschnittlichen Kosten einer Operation in einer schlechtest möglichen Folge von Operationen?

# Amortisierung

**Idee:**

- Zahle für billige Operation etwas mehr
- Verwende Erspartes um für teure Operationen zu zahlen

**Drei Methoden:**

1. Aggregatmethode
2. Bankkonto – Methode
3. Potentialfunktion – Methode

# 1.Aggregat – Methode: Dualzähler

## Bestimmung der Bitwechselkosten eines Dualzählers

| Operation | Zählerstand | Kosten |
|---|---|---|
| | 00000 | |
| 1 | 00001 | 1 |
| 2 | 00010 | 2 |
| 3 | 00011 | 1 |
| 4 | 00100 | 3 |
| 5 | 00101 | 1 |
| 6 | 00110 | 2 |
| 7 | 00111 | |
| 8 | 01000 | |
| 9 | 01001 | |
| 10 | 01010 | |
| 11 | 01011 | |
| 12 | 01100 | |
| 13 | 01101 | |

# 2. Bankkonto – Methode

**Beobachtung:**

In jedem Schritt wird genau eine 0 in eine 1 verwandelt

**Idee:**

Bezahle zwei KE für das Verwandeln einer 0 in eine 1

→ jede 1 hat eine KE auf dem Konto

# Bankkonto – Methode

| Operation | Zählerstand |
|---|---|
| | 0 0 0 0 0 |
| 1 | 0 0 0 0 1 |
| 2 | 0 0 0 1 0 |
| 3 | 0 0 0 1 1 |
| 4 | 0 0 1 0 0 |
| 5 | 0 0 1 0 1 |
| 6 | 0 0 1 1 0 |
| 7 | 0 0 1 1 1 |
| 8 | 0 1 0 0 0 |
| 9 | 0 1 0 0 1 |
| 10 | 0 1 0 1 0 |

# 3. Potentialfunktion

**Potentialfunktion $\phi$**

Datenstruktur $D \rightarrow \phi(D)$

$t_l$ = wirkliche Kosten der $l$-ten Operation

$\phi_l$ = Potential nach Ausführung der $l$-ten Operation (= $\phi(D_l)$ )

$a_l$ = amortisierte Kosten der $l$-ten Operation

**Definition:**

$$a_l = t_l + \phi_l - \phi_{l-1}$$

# Beispiel: Dualzähler

$D_i$ = Stand nach der $i$-ten Operation

$b_i = \phi(D_i)$ = # von Einsen in $D_i$

| $i$–te Operation | # von Einsen |
|---|---|
| $D_{i-1}$: .....0/1.....01.....1 | $b_{i-1}$ |
| ↓ | |
| $D_i$ : .....0/1.....10.....0 | $b_i = b_{i-1} - t_i + 1$ |

$t_i$ = Bitresetkosten von Operation $i$

# Dualzähler

$a_i$ = amortisierte Bitwechselkosten von Operation i

$$
\begin{aligned}
a_i &= t_i + 1 + \left(b_{i-1} - t_i + 1\right) - b_{i-1} \\
&= 2 \\
&\Rightarrow \sum t_i \le 2n
\end{aligned}
$$

# Dynamische Tabellen

**Problem:**

Verwaltung einer Tabelle unter den Operationen Einfügen und Entfernen, so dass

- die Tabellengröße der Anzahl der Elemente angepasst werden kann
- immer ein konstanter Anteil der Tabelle mit Elementen belegt ist
- die Kosten für *n* Einfüge- oder Entferne–Operationen *O(n)* sind.

Organisation der Tabelle: Hashtabelle, Heap, Stack, etc.

Belegungsfaktor $\alpha_T$: Anteil der Tabellenplätze von T, die belegt sind.

# Implementation Einfügen

```
class dynamic table {

    int [] table;

    int size;                 // Größe der Tabelle
    int num;                  // Anz. der Elemente

dynamicTable() {              // Initialisierung der leeren Tabelle
    table = new int [1];
    size = 1;
    num = 0;
    }
```

# Implementation Einfügen

```
insert ( int x) {
    if (num == size ) {
        new Table = new int [2*size];
        for (i = 0; i < size; i++)
            füge table[i] in newTable ein;
        table = newTable;
        size = 2*size;
    }
    füge x in table ein;
    num = num + 1;
}
```

# Kosten von n Einfüge-Operationen in eine anfangs leere Tabelle

$t_i$ = Kosten der *i*-ten Einfüge-Operation

**Worst case:**

$t_i = 1$, falls die Tabelle vor der Operation i nicht voll ist
$t_i = (i - 1) + 1$, falls die Tabelle vor der Operation i voll ist.

Also verursachen *n* Einfüge-Operationen höchstens Gesamtkosten von

$$\sum_{i=1}^{n} (i) = O(n^2)$$

**Amortisierter Worst-Case:**

Aggregat -, Bankkonto -, Potential-Methode

# Potential-Methode

*T* Tabelle mit

- $k = T.num$ Elemente
- $s = T.size$ Größe

**Potentialfunktion**

$$\phi(T) = 2k - s$$

# Potential-Methode

**Eigenschaften**

- $\phi_0 = \phi(T_0) = \phi$ ( leere Tabelle ) = -1
- Unmittelbar vor einer Tabellenexpansion ist $k = s$,
  also $\phi(T) = k = s.$
- Unmittelbar nach einer Tabellenexpansion ist $k = s/2$,
  also $\phi(T) = 2k - s = 0$.
- Für alle $i \geq 1$ : $\phi_i = \phi\,(T_i) > 0$
  Da $\phi_n - \phi_0 \geq 0$ , gilt

$$\sum t_i \leq \sum a_i$$

# Berechnung der amortisierten Kosten $a_i$ der i-ten Einfüge-Operation

$k_i$ = # Elemente in T nach der i-ten Operation

$s_i$ = Tabellengröße von T nach der i-ten Operation

**Fall 1**: *i*-te Operation löst keine Expansion aus

$k_i = k_{i-1} + 1,\ s_i = s_{i-1}$

$$
\begin{aligned}
a_i &= 1 + (2k_i - s_i) - (2k_{i-1} - s_{i-1}) \\
&= 1 + 2(k_i - k_{i-1}) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

*Fall 2*: *i*-te Operation löst Expansion aus

$k_i = k_{i-1} + 1,\ s_i = 2s_{i-1}$

$a_i = k_{i-1} + 1 + (2k_i - s_i) - (2k_{i-1} - s_{i-1})$

$= 3$

# Einfügen und Entfernen von Elementen

**Jetzt:** Kontrahiere Tabelle, wenn Belegung zu gering!

**Zíele:**

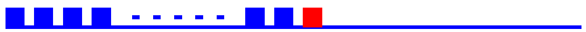
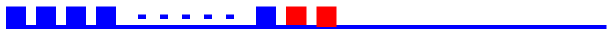
(1) Belegungsfaktor bleibt durch eine Konstante nach unten beschränkt

(2) amortisierte Kosten einer einzelnen Einfüge- oder Entferne-Operation sind konstant.

**1. Versuch**

- Expansion: wie vorher
- Kontraktion: Halbiere Tabellengröße, sobald Tabelle weniger als ½ voll ist!

# „Schlechte“ Folge von Einfüge- und Entfernenoperationen

| | | Kosten |
|---|---|---|
| *n/2* mal Einfügen (Tabelle voll) |  | 3 *n/2* |
| *I:* Expansion |  | *n/2* + 1 |
| *D, D*: Kontraktion |  | *n/2* + 1 |
| *I, I* : Expansion |  | *n/2* + 1 |
| *D, D*: Kontraktion |  | |

Gesamtkosten der Operationsfolge:
$I_{n/2}$, *I,D,D,I,I,D,D,...* der Länge *n* sind

# 2. Versuch

**Expansion:** Verdoppele die Tabellengröße, wenn in die volle Tabelle eingefügt wird.

**Kontraktion:** Sobald der Belegungsfaktor unter ¼ sinkt, halbiere die Tabellengröße.

**Folgerung:** Die Tabelle ist stets wenigstens zu ¼ voll, d.h.

$$\frac{1}{4} \leq \alpha(T) \leq 1$$

Kosten einer Folge von Einfüge- und Entferne-Operationen?

# Analyse Einfügen und Entfernen

*k = T.num,   s = T.size,* $\alpha$ *= k/s*

**Potentialfunktion** $\phi$

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Analyse Einfügen und Entfernen

$$\boxed{\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}}$$

Unmittelbar nach einer Expansion oder Kontraktion der Tabelle:

$s = 2k$, also $\phi(T) = 0$

# Einfügen

*i-te* Operation: $k_i = k_{i-1} + 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} \geq \frac{1}{2}$

Fall 2: $\alpha_{i-1} < \frac{1}{2}$

- Fall 2.1: $\alpha_i < \frac{1}{2}$
- Fall 2.2: $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$

# Einfügen

Fall 2.1: $\alpha_{i-1} < ½$, $\alpha_i < ½$ (keine Expansion)

**Potentialfunktion** $\phi$

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Einfügen

Fall 2.2: $\alpha_{i-1} < ½$, $\alpha_i \geq ½$ (keine Expansion)

**Potentialfunktion $\phi$**

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{ falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{ falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Entfernen

$k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} < ½$

Fall 1.1: Entfernen verursacht keine Kontraktion

$s_i = s_{i-1}$

**Potentialfunktion $\phi$**

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls}\, \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls}\, \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Entfernen

$k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 1: $\alpha_{i-1} < ½$

Fall 1.2: $\alpha_{i-1} < ½$ Entfernen verursacht Kontraktion

$s_i = s_{i-1} / 2 \quad k_{i-1} = s_{i-1}/4$

**Potentialfunktion** $\phi$

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls}\, \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls}\, \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Entfernen

Fall 2: $\alpha_{i-1} \geq ½$ keine Kontraktion

$s_i = s_{i-1} \quad k_i = k_{i-1} - 1$

Fall 2.1: $\alpha_i \geq ½$

**Potentialfunktion $\phi$**

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls } \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls } \alpha < 1/2 \end{cases}$$

# Entfernen

Fall 2: $\alpha_{i-1} \geq ½$ keine Kontraktion

$$s_i = s_{i-1} \quad k_i = k_{i-1} - 1$$

Fall 2.2: $\alpha_i < ½$

**Potentialfunktion $\phi$**

$$\phi(T) = \begin{cases} 2k - s, \text{falls}\, \alpha \geq 1/2 \\ s/2 - k, \text{falls}\, \alpha < 1/2 \end{cases}$$