Optimierung

Vorlesung 6

Lineare Programmierung I

Lineare Programmierung / Optimierung

Spezialfall der Optimierung mit Nebenbedingungen:

- **Funktionen** $f, h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- **Ziel:**

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$\textbf{wobei } h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$$
$$g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0$$

- **Alle Funktionen $f, h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_p$ sind linear**

Bemerkungen:

- Wichtiger Spezialfall mit vielen Anwendungen
  - Resource allocation, transportation, job planning, …
- Lineare Funktionen sind konvex → Spezialfall der konvexen Optimierung
- Es ist möglich, sehr grosse Probleme effizient zu lösen
- Schöne Theorie mit Anwendungen auch in der komb. Optimierung!

Beispiel (Resource Allocation)

In einer Fabrik werden 3 verschiedene Produkte (P1, P2, P3) hergestellt. Für die Herstellung werden 3 verschiedene Rohstoffe (A, B, C) gebraucht. Wieviel der Rohstoffe für jedes Produkt gebraucht werden, sowie Verfügbarkeit der Rohstoffe und wirtschaftlicher Gewinn der Produkte sind im Folgenden zusammengestellt:

Rohstoff	P1	P2	P3	Verfügbarkeit
A	2	0	0	4
B	1	0	2	8
C	0	3	1	6
Gewinn/Einheit	3	4	2	

- Wieviele Einheiten sollen von jedem Produkt hergestellt werden, um den Gesamtgewinn zu maximieren?

Beispiel (Resource Allocation)

Rohstoff	P1	P2	P3	Verfügbarkeit
A	2	0	0	4
B	1	0	2	8
C	0	3	1	~~6~~
Gewinn/Einheit	3	4	2	

- Maximiere profitabelstes Produkt (P2):
  - 2 Einheiten (wegen Rohstoff C)
- Übrige Rohstoffe erlauben 2 Einheiten von Produkt P1:
  - 2 Einheiten P1, 2 Einheiten P2, 0 Einheiten P3

Gewinn: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$

- 6 restliche Einheiten von Rohstoff B bleiben ungebraucht...

Beispiel (Resource Allocation)

2 1

Rohstoff	P1	P2	P3	Verfügbarkeit
A	2	0	0	4 0
B	1	0	2	8 6
C	0	3	1	6 3
Gewinn/Einheit	3	4	2	

- Aktuelle Lösung:
  - 2 Einheiten P1, 2 Einheiten P2, 0 Einheiten P3
- Verbesserung:
  - Nur 1 Einheit P2, dafür 3 Einheiten P3   2:P1, 1:P2, 3:P3

Gewinn: $2\cdot 3 + 4 + 3\cdot 2 = 16$

Beispiel (Resource Allocation)

Rohstoff	P1	P2	P3	Verfügbarkeit
A	2	0	0	4
B	1	0	2	8
C	0	3	1	6
Gewinn/Einheit	3	4	2	

- Aktuelle Lösung: 2 Einheiten P1, 1 Einheiten P2, 3 Einheiten P3

  Gew: 16

- Ist dies die best mögliche Lösung? ←
- Falls ja, wie kann man das zeigen? ←

- Was, wenn wir die Ausgangslage ändern:
  - Zum Beispiel: Verkauf von restlichen Rohstoffen
  - Was ist der Einfluss von Gewinn, Verfügbarkeit?

Als lineares Programm (LP)

Rohstoff	P1	P2	P3	Verfügbarkeit
A	2	0	0	4
B	1	0	2	8
C	0	3	1	6
Gewinn/Einheit	3	4	2	

(2, 1, 3)

- Variablen: x_1: Produkt P1, x_2: Produkt P2, x_3: Produkt P3
- Optimierungsproblem:

Gewinn

lineares Programm (LP)

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
& x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
& & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
& x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Rohstoff A

" B

" C

- $x_i \in \mathbb{Z}$: integer linear program (IP oder ILP)

Beispiel Job Allocation

K Jobs muessen mit Hilfe von S Servern ausgeführt werden, wobei Server i während s_i Stunden zur Verfügung steht. Es ist möglich, einen Job j auf mehrere Server zu verteilen und wir nehmen an, dass Server i in einer Stunde, einen α_{ij}-Anteil von Job j ausführen kann. Wie kann die gesamte Ausführungszeit minimiert werden?

$\forall i,j$: $x_{i,j}$: Zeit, welche Job j auf Server i ist

$$\min \sum_{i,j} x_{i,j}$$

$$\forall i: \sum_{j=1}^{K} x_{i,j} \leq s_i \quad \longleftarrow \text{Ungl.}$$

$$\forall j: \sum_{i=1}^{S} \alpha_{i,j} \cdot x_{i,j} = 1 \quad \longleftarrow \text{Gl.}$$

$$\forall i,j: x_{i,j} \geq 0$$

LP

Lineare Zielfunktion:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

Lineare Nebenbedingungen:

$x \geq 0$

$x \in \{0, 1\}$

$x \in \mathbb{Z}$

- Endliche Anzahl lineare Nebenbedingungen
- Gleichungen:

$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i$$

- Ungleichungen:

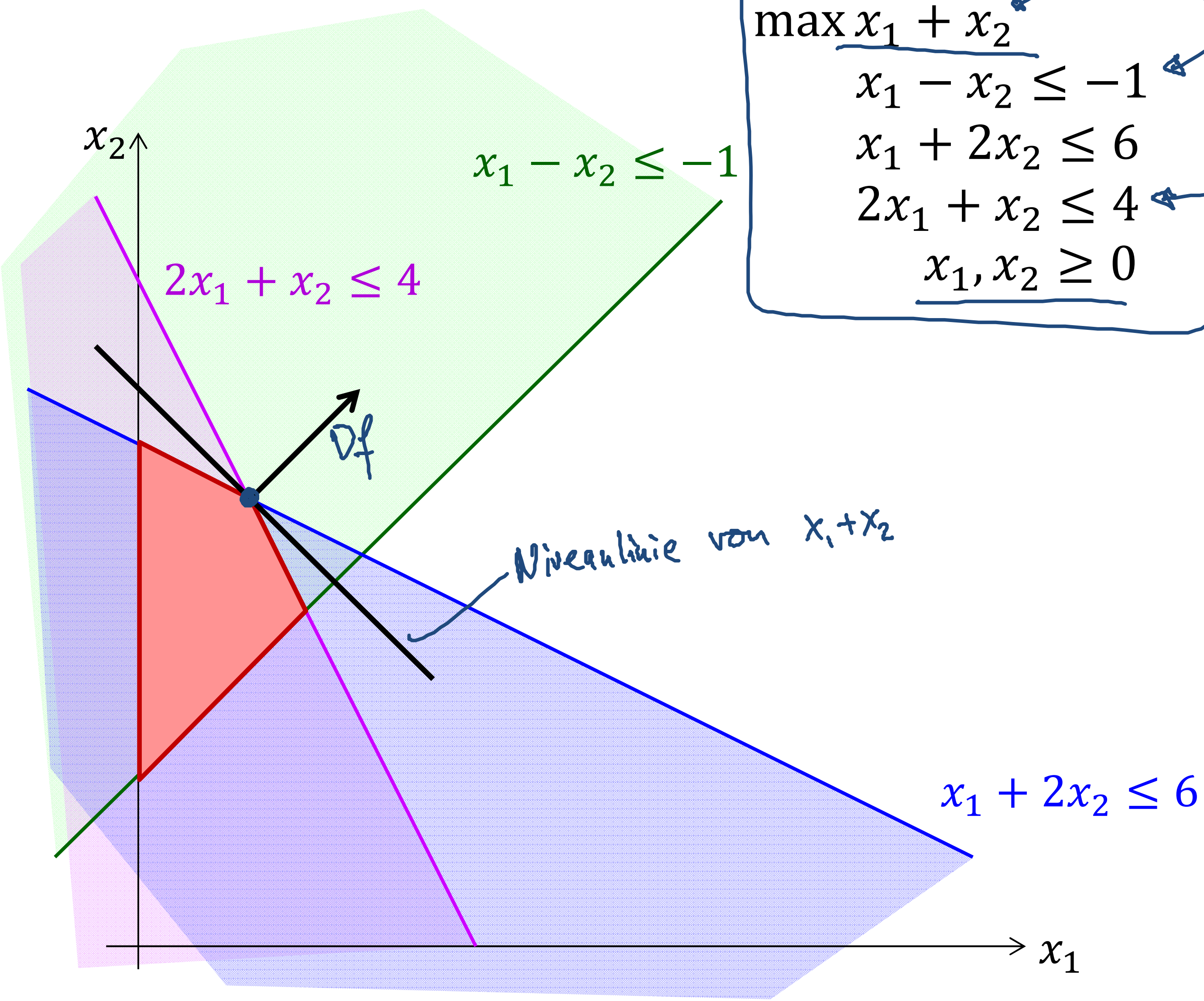
$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i$$
$$h_i(x_1, \dots, x_n) = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \geq b_i$$

Integer LP (IP, ILP):

- LP, bei welchem die Var. (z.T.) nur ganzzahlige Werte annehmen können
- LP: lösbar in Polynomialzeit
- IP: i.A. NP-vollständig (Ausnahmen: z.B. max. Fluss in Graphen)

Geometrische Interpretation

Beispiel:



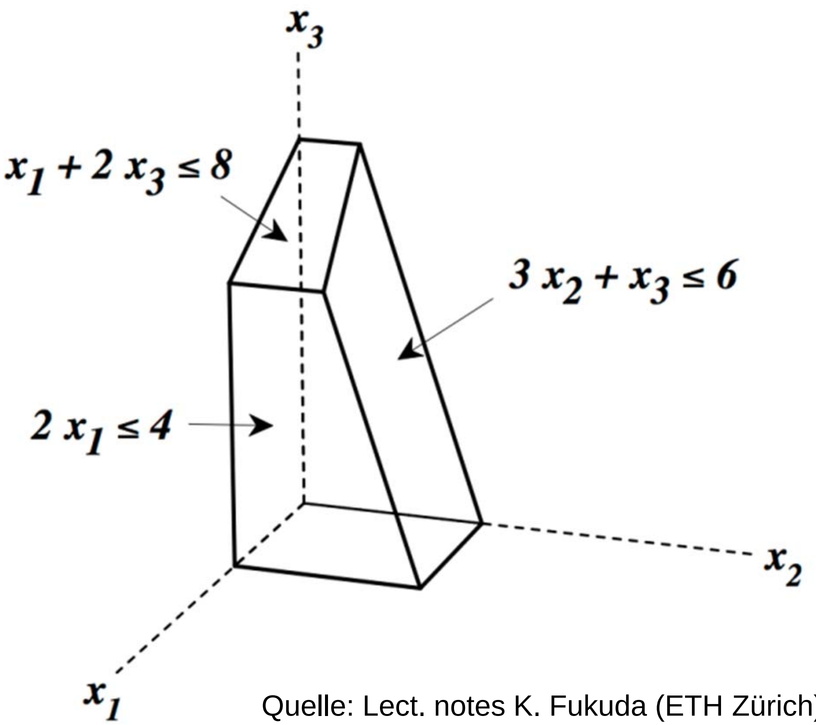
$$\max x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 \leq -1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

LP

Resource Allocation Beispiel

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ & & & & & & & \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$



Quelle: Lect. notes K. Fukuda (ETH Zürich)

Lösung eines LPs

Es gibt zwei Fälle, in welchen ein LP keine optimale Lösung hat:

- Unzulässiges LP (infeasible LP):

$$\begin{gathered}\max\ x_1 + 3x_2 \\ \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\geq -2 \end{aligned}\right\} \text{Konflikt} \\ \hline 0 \geq 1\end{gathered}$$

- Unbeschränktes LP (unbounded LP):

$$\begin{gathered}\max\ \underline{2x_1 - x_2} \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -3\end{gathered}$$

$x_2 = 1$, $\underline{x_1} \geq 0$

Lösung eines LPs

Theorem: Jedes LP erfüllt genau eine der folgenden Bedingungen:

1) Das LP ist unzulässig (infeasible)
2) Das LP ist unbeschränkt (unbounded)
3) Das LP hat eine optimale Lösung

Beweis:

- Falls 1) und 2) nicht zutreffen, muss es ein lokales Minimum/Maximum haben
- Optimalität des lokalen Minimums/Maximums folgt aus der Konvexität des Optimierungsproblems

Lösen eines LPs:

- Finde, welche der drei Möglichkeiten zutrifft
- Falls 1) oder 2): Zertifikat für Unzulässigkeit / Unbeschränktheit
- Falls 3): Optimale Lösung + Zertifikat für Optimalität

Optimalität nachweisen

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & & 0
\end{array}
$$

$\ldots \leq \ldots$

Aktuelle Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (2,1,3)$ Gewinn: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$

- Jede zulässige Lösung erfüllt $\mathrm{E1}, \ldots, \mathrm{E4}$
- Jede zulässige Lösung muss daher auch positive Linearkombinationen von $\mathrm{E1}, \ldots, \mathrm{E4}$ erfüllen, z.B. $2 \cdot \mathrm{E1} + 2 \cdot \mathrm{E3}$:

$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 20$

- Wegen E4, gilt $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq \underbrace{4x_1 + 6x_2 + 2x_3}_{\text{obere Schr. f. Zielfkt.}} \leq 20$

Zielfkt. ≤ 20

Optimalität nachweisen

$$\begin{array}{llllllll} \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\ \text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ \text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ \text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Aktuelle Lösung: $(x_1, x_2, x_3) = (2,1,3)$ Gewinn: $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$

- Bessere positive Linearkombination:

$$\frac{4}{3} \cdot \text{E1} + \frac{1}{3} \cdot \text{E2} + \frac{4}{3} \cdot \text{E3}$$

$$\frac{8}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_1 + 4x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_3 \leq \frac{4}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 8 + \frac{4}{3}\cdot 6$$

$$\underbrace{3x_1 + 4x_2 + 2x_3}_{\text{Zielfkt.}} \leq 16$$

- Wie findet man die beste Kombination der Nebenbedingungen?

Allgemeine Kombination der Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Allgemeine Lin.-Komb.: $y_1 \cdot \text{E1} + y_2 \cdot \text{E2} + y_3 \cdot \text{E3}, \quad y_i \geq 0$

$$2y_1x_1 + y_2x_1 + 2y_2x_3 + 3y_3x_2 + y_3x_3 \leq 4y_1 + 8y_2 + 6y_3$$

$$\underbrace{(2y_1 + y_2)x_1 + (3y_3)x_2 + (2y_2 + y_3)x_3}_{\text{Komp.-weise} \geq \text{Zielfkt.}} \leq \underbrace{4y_1 + 8y_2 + 6y_3}_{\text{obere Schr.}}$$

so klein wie möglich

Allgemeine Kombination der Nebenbedingungen

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

$$y_1 \cdot \text{E1} + y_2 \cdot \text{E2} + y_3 \cdot \text{E3}, \qquad y_i \geq 0:$$

$$(2y_1 + y_2)x_1 + (3y_3)x_2 + (2y_2 + y_3)x_3 \leq 4y_1 + 8y_2 + 6y_3$$

$$\begin{array}{lrl}
\min & 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 & \\
& 2y_1 + y_2 & \geq 3 \\
& 3y_3 & \geq 4 \\
& 2y_2 + y_3 & \geq 2 \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}$$

duales LP

wieder ein LP

Duales LP

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Duales LP:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min & 4y_1 & + & 8y_2 & + & 6y_3 & & \\
 & 2y_1 & + & y_2 & & & \geq & 3 \\
 & & & & & 3y_3 & \geq & 4 \\
 & & & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\
 & y_1 \geq 0, & & y_2 \geq 0, & & y_3 \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Duales LP gibt optimale positive Linearkombination, um die optimale Lösung des primalen LPs zu beschränken
- Funktioniert dies immer?

LP in kanonischer Form:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
 & \max & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + & \cdots & + & c_n x_n & & \\
y_1 & & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & \geq & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
y_m & & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & \geq & b_m \\
 & & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & \ldots, & & x_n \geq 0 & &
\end{array}
$$

- Jedes LP kann in kanonische Form gebracht werden (Übung!)

Duales LP:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min & b_1 y_1 & + & b_2 y_2 & + & \cdots & + & b_m y_m & & \\
 & a_{11} y_1 & + & a_{21} y_2 & + & \cdots & + & a_{m1} y_m & \geq & c_1 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{1n} y_1 & + & a_{2n} y_2 & + & \cdots & + & a_{mn} y_m & \geq & c_n \\
 & y_1 \geq 0, & & y_2 \geq 0, & & \ldots, & & y_m \geq 0 & &
\end{array}
$$

- Lösung des dualen LP: obere Schranke für Lösung des primalen LP

Kanonische Form (Matrix-Schreibweise)

Primales LP (kanonische Form):

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} &\le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Komp.-weise

$$\begin{aligned} \min\ & -c^T x \\ -Ax &\ge -b \\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Duales LP:

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ A^\top \boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & (-b)^T y \\ -A^T y &\le -c \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Theorem (Schwache Dualität):

Jede duale Lösung ist eine obere Schranke für die optimale primale Lösung. Das heisst, für alle zulässigen primalen und dualen Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ gilt:

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right)$$

- Korollar: Falls $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ gilt, sind beide Lösungen optimal.

Starke Dualität

Lemma von Farkas: Ein System $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ hat genau dann keine Lösung, wenn das System $\underline{\{\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ und } \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}\}}$ eine Lösung hat.

Theorem (Starke Dualität):
Für optimale primale und duale Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ gilt $\underline{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}}$.

Farkas $\rightarrow$ st. Dualität

$\max c^T x$

$$\left[\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ c^T x \geq f \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \min b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array}}$$

x^*, y^* $\qquad$ $\max c^T x = f^*$

$c^T x^* \geq f \iff \forall y$ zul. $b^T y \geq f$

$\underline{c^T x^* < f} \iff \underline{\exists y \text{ s.t. } b^T y < f}$

$\underline{\forall \varepsilon}: c^T x^* < f^* + \varepsilon \iff \forall \varepsilon\ \exists y$ zul. $b^T y < \underline{f}^* + \varepsilon$

$B = \begin{pmatrix} -c^T \\ A \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underbrace{Bx \leq \begin{pmatrix} -f \\ b \end{pmatrix}}$

keine Lsg. $\iff$ $B^T z \geq 0$

$$(-c \mid A^T) \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix} = -y_0 c + A^T y \geq 0$$

$z = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -f \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix} = -y_0 f + b^T y < 0 \longrightarrow$

$A^T y \geq y_0 c$ $\qquad$ $A^T y' \geq c$

$b^T y < y_0 f$ $\qquad$ $\underline{b^T y' < f}$

$\underline{y_0 > 0}$

Complementary Slackness

Satz vom komplementären Schlupf (complementary slackness):
Für zulässige Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

1) $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind optimale Lösungen
2) $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$
3) $\underbrace{\boldsymbol{y}^\top}_{\geq 0}(\underbrace{\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}}_{\geq 0}) = 0$ und $\boldsymbol{x}^\top(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}) = 0$

st. Dualität

a) b)

max $c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

$\forall i: \; y_i = 0 \lor (Ax)_i = b_i$

a) $Ax \leq b$ $\qquad$ $A^T y \geq c$

$y^T A x \leq y^T b = c^T x$ $\qquad$ $x^T A^T y \geq x^T c = b^T y$

$y^T A x = x^T A^T y = c^T x = b^T y$

$y^T b - y^T A x = 0$

b)

$y^T b = y^T A x$

$x^T c = x^T A^T y$

$=$

$b^T y = c^T x$

Zertifikat für Unzulässigkeit

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & -x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & -15 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Positive Linearkombination von $\mathrm{E1}, \dots, \mathrm{E3}$:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{E1} + 1 \cdot \mathrm{E2} + 2 \cdot \mathrm{E3} =$$

Zertifikat für Unzulässigkeit

Lemma von Farkas: Ein System $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ hat genau dann keine Lösung, wenn das System $\{\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ und } \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}\}$ eine Lösung hat.

Theorem: Jedes unzulässige LP hat ein solches Zertifikat für Unzulässigkeit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & -3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & 0 &
\end{array}$$

- Falls (x_1, x_2, x_3) zulässig ist, dann ist

$$(x_1, x_2 + \alpha, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + \alpha \cdot (0,1,0)$$

  auch zulässig und die Zielfunktion nimmt um 4α zu.

- Die Richtung $(0,1,0)$ ist ein Zertifikat für die Unbeschränktheit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & -3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & & 0
\end{array}$$

- Falls (x_1, x_2, x_3) zulässig ist, dann ist

$$(x_1, x_2, x_3) + \alpha \cdot (1,1,1)$$

  auch zulässig und die Zielfunktion nimmt um α zu.

- Die Richtung $(1,1,1)$ ist ein Zertifikat für die Unbeschränktheit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

Theorem (Zertifikat Unbeschränktheit): Ein LP

$$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}\,, \text{wobei } A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

ist genau dann unbeschränkt, falls es eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}$ und eine Richtung $\boldsymbol{z}$ gibt, so dass $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} > 0$.

Beweisidee:

- Folgt im Wesentlichen aus der Konvexität des zulässigen Bereichs
- Unbeschränktheit: Es gibt ein $\boldsymbol{z}$, so dass es für alle zulässigen $\boldsymbol{x_1}$ eine zulässige Folge $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots$ gibt, so dass

  $$\lim_{i \to \infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x_i} = \infty,$$

  sowie

  $$\lim_{i \to \infty} \frac{\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_1}}{\|\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_1}\|} = \boldsymbol{z}$$

- Konvexität: $\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{z}$ ist zulässig für alle zulässigen $\boldsymbol{x}$ und alle $\alpha \geq 0$

Dualität, Optimalität, Zulässigkeit und Unbeschränktheit

Theorem: Falls (P) ein LP ist und (D) das zugehörige duale LP ist, dann ist (P) auch das duale LP von (D). Zudem gilt genau eine der folgenden Bedingungen:

1) Die LP (P) und (D) sind beide zulässig und haben beide den gleichen optimalen Zielfunktionswert
2) Das LP (P) ist unzulässig und das LP (D) ist unbeschränkt
3) Das LP (P) ist unbeschränkt und das LP (P) ist unzulässig
4) Beide LP sind unzulässig

Duale lineare Programme

Primales LP	Duales LP
$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ $A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}$ beliebig
$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}$ beliebig	$\min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
$\max\ (\boldsymbol{c}^1)^\top \boldsymbol{x}^1 + (\boldsymbol{c}^2)^\top \boldsymbol{x}^2$ $A^{11}\boldsymbol{x}^1 + A^{12}\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{b}^1$ $A^{21}\boldsymbol{x}^1 + A^{22}\boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{b}^2$ $\boldsymbol{x}^1$ beliebig, $\boldsymbol{x}^2 \geq \boldsymbol{0}$	$\min\ (\boldsymbol{b}^1)^\top \boldsymbol{y}^1 + (\boldsymbol{b}^2)^\top \boldsymbol{y}^2$ $(A^{11})^\top \boldsymbol{y}^1 + (A^{21})^\top \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{c}^1$ $(A^{12})^\top \boldsymbol{y}^1 + (A^{22})^\top \boldsymbol{y}^2 \geq \boldsymbol{c}^2$ $\boldsymbol{y}^1$ beliebig, $\boldsymbol{y}^2 \geq \boldsymbol{0}$