Optimierung

Vorlesung 8

Lineare Programmierung III: Simplex Algorithmus

Resource Allocation Beispiel aus Vorlesung 6

Primales LP:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & = 16 \\
 & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Duales LP:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min & 4y_1 & + & 8y_2 & + & 6y_3 & & = 16 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & & & \geq & 3 \\
 & & & & & 3y_3 & \geq & 4 \\
 & & & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\
 & y_1 \geq 0, & & y_2 \geq 0, & & y_3 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Optimale Lösungen:

$$\longrightarrow \boldsymbol{x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{y_1 = \frac{4}{3}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{4}{3}}$$

Standardform

Kanonische Form:

max $c^T x$
$Ax \leq b$
$x \geq 0$

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
 & 2x_1 & & & & & 0 \leq & 4 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & 0 \leq & 8 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & 0 \leq & 6
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Standardform:

Transformiere alle Ungleichungen in Gleichungen

max $c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & \\
 & 2x_1 & & & & & + & w_1 & = 4 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & + & w_2 & = 8 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & + & w_3 & = 6
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad \underline{w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0}$$

- w_1, w_2, w_3 heissen Schlupfvariablen (slack variables)

Basis

Als «Dictionary» (nach Schlupfvariablen aufgelöst):

Basis

$$
\begin{array}{rcrrrrrr}
\max & & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & & & \\
w_1 & = & 4 & - & 2x_1 & & & \\
w_2 & = & 8 & - & x_1 & & - & 2x_3 \\
w_3 & = & 6 & & & - \; 3x_2 & - & x_3
\end{array}
$$

$$\underbrace{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0}_{\text{Nichtbasis}} \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

- Basis: Variablen auf der linken Seite
- Basislösung:

  $$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad w_1 = 4 \quad w_2 = 8 \quad w_3 = 6$$

- Beim gegebenen LP ist die Basislösung zulässig
  - Wir werden sehen, dass dies immer möglich ist (wenn das LP zulässig ist)
- Zielfunktionswert: 0

- Verbessern der gegebenen Lösung: erhöhe x_1, x_2 oder x_3

Verbessern der Lösung

Lineares Programm:

$$\max\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 - 2x_1 \\ w_2 &= 8 - x_1 - 2x_3 \\ w_3 &= 6 - 3x_2 - x_3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad w_1 = 4, \ w_2 = 8, \ w_3 = 6$

Erhöhe $\boldsymbol{x_1} \implies \boldsymbol{x_1 = 2}$:

- Führt zu $w_1 = 0$
- Idee: Wenn wir die Rolle von x_1 und w_1 vertauschen, haben wir wieder eine Basislösung $(w_1 = x_2 = x_3 = 0)$
- Löse erste Gleichung nach x_1 auf…

$$x_1 = 2 - w_1/2$$

Basiswechsel

Lineares Programm:

$$\max\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$w_1 = 4 - 2x_1$$
$$w_2 = 8 - x_1 - 2x_3$$
$$w_3 = 6 - 3x_2 - x_3$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Basiswechsel: Vertausche Rollen von x_1 und w_1: $\cancel{x_1 = 8 - 2x_3 - w_2}$

$x_1 = 2 - w_1/2$

$$\boxed{\begin{aligned} &\max\ 6 - \tfrac{3}{2}w_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ &x_1 = 2 - w_1/2 \\ &w_2 = 6 + w_1/2 - 2x_3 \\ &w_3 = 6 - 3x_2 - x_3 \end{aligned}}$$

$w_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 2$, $w_2 = 6$, $w_3\ 6$

2. Pivot

Lineares Programm:

$8 - \frac{4}{3}w_3 - \frac{4}{3}x_3$

$$\max\ 6 - {}^{3}/_{2}\,w_1 + 4x_2 + 2x_3$$

Pivot

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - {}^{1}/_{2}\,w_1 \\
w_2 &= 6 + {}^{1}/_{2}\,w_1 \qquad\qquad - 2x_3 \\
w_3 &= 6 \qquad\qquad - 3x_2 - x_3
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Pivot: Erhöhe x_2 (x_2 wird zu Basisvar.), w_3 verlässt Basis

$x_2 = 2$

$3x_2 = 6 - w_3 - x_3$

$x_2 = 2 - \frac{w_3}{3} - \frac{x_3}{3}$

$\max\ 14 - \frac{3}{2}w_1 - \frac{4}{3}w_3 + \frac{2}{3}x_3$

$x_1 = 2 - w_1/2$

$w_2 = 6 + w_1/2 - 2x_3$

$x_2 = 2 - \frac{w_3}{3} - \frac{x_3}{3}$

Lineares Programm:

$2 + 1/6\, w_1 - 1/3\, w_2$

$$\max\ 14 - {}^3\!/_2\, w_1 - {}^4\!/_3\, w_3 + {}^2\!/_3\, x_3$$
$$x_1 = 2 - {}^1\!/_2\, w_1$$
$$w_2 = 6 + {}^1\!/_2\, w_1 - 2x_3$$
$$x_2 = 6 - {}^1\!/_3\, w_3 - {}^1\!/_3\, x_3$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Pivot: Erhöhe x_3 (x_3 wird zu Basisvar.), w_2 verlässt Basis

$2x_3 = 6 + 1/2\, w_1 - w_2$

$x_3 = 3 + 1/4\, w_1 - 1/2\, w_2$

$\max\ 16 - 4/3\, w_1 - 1/3\, w_2 - 4/3\, w_3$

$x_1 = 2 - 1/2\, w_1$

$x_2 = 5 - 1/3\, w_3 \quad - 1/12\, w_1 + 1/6\, w_2$

$x_3 = 3 + 1/4\, w_1 - 1/2\, w_2$

Lösung

Basislsg: $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

Lineares Programm:

$$\max\ 16 - {}^4/_3\, w_1 - {}^4/_3\, w_3 - {}^1/_3\, w_2$$

$$x_1 = +2 - {}^1/_2\, w_1$$

$$x_3 = +3 + {}^1/_4\, w_1 - {}^1/_2\, w_2$$

$$x_2 = +1 - {}^1/_{12}\, w_1 - {}^1/_3\, w_3 + {}^1/_6\, w_2$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Optimale Lösung: $\boldsymbol{x_1 = 2,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 3}$

Zielfunktionswert: 16

Zur Erinnerung:

- Optimale Lösung des dualen LP: $y_1 = {}^4/_3,\ \ y_2 = {}^1/_3,\ \ y_3 = {}^4/_3$

LP in “Dictionary”-Form:

$c_i > 0$

Basis

$$\boxed{\begin{aligned} &\max c_0 + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x_N} \\ &\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x_N} \\ &\boldsymbol{x_B} \geq \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{x_N} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}}$$

Falls $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, dann ist $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b}$ eine zulässige Basislösung

- Zielfunktionswert: c_0

Pivot-Schritt:

- Wähle eine Variable x_i aus $\boldsymbol{x_N}$ mit Koeffizienten $c_i > 0$
- Erhöhe x_i bis erstes $x_j \in \boldsymbol{x_B}$ Null wird
- Vertausche Rolle von x_i und x_j (x_i neu in der Basis, $x_j = 0$ aus Basis raus)
- Pivot-Schritt kann c_0 nicht verkleinern und erhält $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

Lösung: Falls $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{0}$, dann ist Basislösung $\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b}$ optimal.

Simplex Algorithm, Beispiel 2

«Dictionary»:

$$\max\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5$$

$$\begin{aligned}
x_6 &= 1 - x_1 - x_3 - x_4 \\
x_7 &= 1 - x_1 - x_2 - x_4 \\
x_8 &= 1 - x_2 - x_3 \\
x_9 &= 1 - x_4 - x_5
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Dictionary ist zulässig:
  - Zul. Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,\ x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 1$
- Vergrössere x_4 (grösster Koeffizient) $\Longrightarrow\ x_4 = 1$ (z.B. x_6 verlässt Basis)

$x_4 = 1 - x_1 - x_3 - x_6$

Simplex Algorithm, Beispiel 2

«Dictionary»:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\max & 7 & - & 3x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & x_5 & - \; 7x_6 \\
x_4 & = & 1 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_6 & & \\
x_7 & = & 0 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_6 & & \\
x_8 & = & 1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & \\
x_9 & = & 0 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_5 & + & x_6
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Variablen aus Nichtbasis, welche erhöht werden können: x_2, x_5
- Man kann beide nicht erhöhen (ohne, dass x_7 oder $x_9 < 0$ werden)
- Falls wir x_2 nehmen, wird x_7 “zuerst” Null

$X_2 = 0 + x_3 + x_6 - x_7$

Simplex Algorithm, Beispiel 2

«Dictionary»:

$$\max\ 7 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7$$

$$\begin{array}{lllllllllll}
x_4 & = & 1 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_6 & & \\
x_2 & = & 0 & + & x_3 & + & x_6 & - & x_7 & & \\
x_8 & = & 1 & - & 2x_3 & - & x_6 & + & x_7 & & \\
x_9 & = & 0 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_5 & + & x_6
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Zielfunktionswert hat sich nicht verändert (Wert: 7)

  → degeneriertes Pivot

- Mehrere degenerierte Pivots können allenfalls zum gleichen Dictonary zurückführen (→ Algorithmus terminiert nicht)

- Kann verhindert werden, indem das Pivot geschickt gewählt wird

Simplex Algorithm, Beispiel 2

«Dictionary»:

$$\max\ 7 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_4 & = & 1 & - & x_1 & - & \underline{x_3} & - & x_6 & & \\
x_2 & = & 0 & \underline{+} & \underline{x_3} & + & x_6 & - & x_7 & & \\
\rightarrow x_8 & = & 1 & - & \underline{\underline{2x_3}} & - & x_6 & + & x_7 & & \\
x_9 & = & 0 & + & x_1 & + & \underline{\underline{x_3}} & - & x_5 & + & x_6
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Wähle x_3 als nächste Variable (x_8 ist erste Var., welche Null wird)

$$2x_3 = 1 - x_8 - x_6 + x_7$$

$$x_3 = 1/2 - \frac{x_8}{8} - \frac{x_6}{2} + \frac{x_7}{2}$$

Simplex Algorithm, Beispiel 2

«Dictionary»:

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max\ 8 - 3x_1 + x_5 - 3x_6 - 4x_7 - x_8 \\
x_4 & = & 0.5 & - & x_1 & - & 0.5x_6 & - & 0.5x_7 & + & 0.5x_8 \\
x_2 & = & 0.5 & + & 0.5x_6 & - & 0.5x_7 & - & 0.5x_8 \\
x_3 & = & 0.5 & - & 0.5x_6 & + & 0.5x_7 & - & 0.5x_8 \\
x_9 & = & 0.5 & + & x_1 & - & x_5 & + & 0.5x_6 & + & 0.5x_7 & - & 0.5x_8
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Wähle x_5 als nächste Variable (x_9 ist erste Var., welche Null wird)

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max\ 8.5 - 2x_1 - 2.5x_6 - 3.5x_7 - 1.5x_8 - x_9 \\
x_4 & = & 0.5 & - & x_1 & - & 0.5x_6 & - & 0.5x_7 & + & 0.5x_8 \\
x_2 & = & 0.5 & + & 0.5x_6 & - & 0.5x_7 & - & 0.5x_8 \\
x_3 & = & 0.5 & - & 0.5x_6 & + & 0.5x_7 & - & 0.5x_8 \\
x_5 & = & 0.5 & + & x_1 & + & 0.5x_6 & + & 0.5x_7 & - & 0.5x_8 & - & x_9
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Simplex Algorithmus

Bemerkungen:

- Jede Variable x_i, welche in der Zielfunktion einen positiven Koeffizienten hat, kann gewählt werden, um in die Basis zu wechseln
- Vertausche x_i mit einer, der Basisvariablen x_j, welche zuerst Null wird
- **Pivot-Auswahlregel:** Auswahl des Pivots, falls es mehrere Möglichkeiten gibt

- Solange kein degeneriertes Pivot auftritt, nimmt der Zielfunktionswert zu
  - Anzahl verschiedener Basen ist endlich
  - **Algorithmus konvergiert** (oder man findet ein Zertifikat f. Unbeschränktheit)

- Anzahl Iterationen:
  - In der Praxis meistens klein, kann i.A. exponentiell sein
  - Man kennt keine Pivot-Regel, für welche die Anzahl Iter. polynomiell ist (wichtiges offenes Problem!)

Zyklen verhindern

Um Terminierung zu garantieren, benötigen wir Pivot-Auswahlregel, welche degenerierte Pivots vermeidet → Zyklen von deg. Pivots

Bland'sche Auswahlregel:

- Bei mehreren Möglichkeiten, wähle immer Variable mit kleinstem Index

Lexikographische Auswahlregel:

- **Idee:** Falls die Koeffizienten ein bisschen perturbiert werden, sollte sich nichts an der optimalen Lösung ändern, aber die Pivots sollten nicht mehr degeneriert sein
- Kann systematisch gemacht werden
- Ersetze $\boldsymbol{b}$ durch $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\epsilon}$, wobei

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{pmatrix}, \text{so dass } 0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \cdots \ll \epsilon_m \ll 1$$

Lexikographische Auswahlregel

Degeneriertes Pivot:

$$\max\ 7 - 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_5 - 7x_6$$

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1 + \underline{\epsilon_1} - x_1 - x_3 - x_6 \\
\underline{x_7} &= \underline{\epsilon_2} - \underline{x_2} + x_3 + x_6 \\
x_8 &= 1 + \underline{\epsilon_3} - x_2 - x_3 \\
x_9 &= \underline{\epsilon_4} + x_1 + x_3 - x_5 + x_6
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- x_2 kann jetzt auf $\underline{\epsilon_2}$ erhöht werden:

$$\underline{x_2 = \cancel{x_4}\ \epsilon_2 - x_7 + x_3 + x_6}$$

Lexikographische Auswahlregel

"Degenerierter Schritt" inkl. ϵ:

$$\max\ 7 + 5\epsilon_2 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7$$

$$\begin{array}{lclcccccccc}
x_4 & = & 1 + \epsilon_1 & - & x_1 & - & x_3 & - & x_6 & & \\
x_2 & = & \epsilon_2 & + & x_3 & + & x_6 & - & x_7 & & \\
x_8 & = & 1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 & - & 2x_3 & - & x_6 & + & x_7 & & \\
x_9 & = & \epsilon_4 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_5 & + & x_6
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Zielfunktionswert hat sich um $5\epsilon_2$ erhöht
- $0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \cdots \ll \epsilon_m$ garantiert, dass die konstanten Terme nie Null werden können
  - Pivot's können nicht degeneriert sein
- ϵ_i sind abstrakte, beliebig kleine Grössen, welche am Schluss einfach ignoriert werden... (durch 0 ersetzen)

Unbeschränktheit

- Stellt man fest, wenn es eine Variable gibt, welche beliebig erhöht werden kann.

Beispiel:

$x_1 = 1 + x_2 - x_3$

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max\ 3x_1 + 2x_2 & & & & & & \\
x_3 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\
x_4 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max\ 3 + 5x_2 - 3x_3 & & & & & & \\
x_1 & = & 1 & + & x_2 & - & x_3 \\
x_4 & = & 2 & & & - & x_3 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

- x_2 kann beliebig erhöht werden → LP ist unbeschränkt

Initiallösung

Bis jetzt: Erste Basislösung ist zulässig

- Was tun, falls nicht?

Kann auch als LP formuliert werden:

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\multicolumn{9}{l}{\max\ 2x_1 + 4x_2 + x_3} \\
x_4 & = & 20 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & -5 & + & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
x_6 & = & -10 & & & - & x_2 & + & x_3 \\
\multicolumn{9}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

- Ersetze Zielfunktion durch $-x_0$ und addiere x_0 zu jeder Gleichung:

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
\multicolumn{11}{l}{\max\ -x_0} \\
x_4 & = & 20 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_5 & = & -5 & + & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_6 & = & -10 & & & - & x_2 & + & x_3 & + & x_0 \\
\multicolumn{11}{c}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Initiallösung

Zulässige Lösung finden:

$$
\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
\max & -x_0 & & & & & & & & & \\
x_4 & = & 20 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_5 & = & -5 & + & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_6 & = & -10 & & & - & x_2 & + & x_3 & + & x_0
\end{array}
$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$X_0 = 10 + x_2 - x_3 + X_6$

Zulässige Lösung finden:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\max & -10 - x_2 + x_3 - x_6 \\
x_4 & = & \boxed{30} & - & x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_6 \\
x_5 & = & 5 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_6 \\
x_0 & = & 10 & & & + & x_2 & - & x_3 & + & x_6
\end{array}
$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

- Basislösung ist zulässig
- Optimaler Zielfunktionswert ist genau dann 0, wenn das ursprüngliche LP zulässig ist
- Falls die optimale Lösung Wert 0 hat, dann ist $x_0 = 0$
- Deshalb ist x_0 nicht in der Basis
  - oder kann mit Pivot-Schritt aus der Basis genommen werden
- Wenn x_0 ignoriert wird, bekommt man damit eine Basislösung des ursprünglichen LPs
- Wird üblicherweise als Phase 1 des Simplex-Alg. bezeichnet

Wie sieht der duale «Dictionary» aus?

$$\max\ c^T x_N \quad A x_N \le b,\ x_N \ge 0 \longrightarrow \max\ c^T x_N \quad A x_N + x_B = b,\ x_N, x_B \ge 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\max\ 0 + c^T x_N \\ &x_B = b - A x_N \\ &x_N, x_B \ge 0 \end{aligned}}$$

dual

$$\min\ b^T y_B \quad A^T y_B \ge c,\ y_B \ge 0 \longrightarrow \max\ -b^T y_B \quad -A^T y_B \le -c,\ y_B \ge 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\max\ 0 - b^T y_B \\ &y_N = -c + A^T y_B \\ &y_N, y_B \ge 0 \end{aligned}}$$

Simplex und Dualität: Beispiel

Primales LP

$$\max\ 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{aligned} x_3 &= 16 - 4x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 &= 5 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Pivot: x_1 and x_3

$4x_1 = 16 - 2x_2 - x_3$, $x_1 = 4 - x_2/2 - x_3/4$

$\max\ 12 + 1/2\, x_2 - 3/4\, x_3$

Duales LP

$$\max\ -16y_3 - 8y_4 - 5y_5$$
$$\begin{aligned} y_1 &= -3 + 4y_3 + y_4 + y_5 \\ y_2 &= -2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Führe gleichen Pivot-Schritt aus (y_3, y_1)

$4y_3 = 3 + y_1 - y_4 - y_5$

$y_3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} y_1 - 3/4\, y_4 - 3/4\, y_5$

$\max\ -12 + \ldots - -$

Simplex und Dualität: Beispiel

Primales LP

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\multicolumn{7}{l}{\max\ 12 + 0.5x_2 - 0.75x_3} \\
x_1 & = & 4 & - & 0.5x_2 & - & 0.25x_3 \\
x_4 & = & 4 & - & 1.5x_2 & + & 0.25x_3 \\
x_5 & = & 1 & - & 0.5x_2 & + & 0.25x_3 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

dual

Duales LP

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\multicolumn{9}{l}{\max\ -12 - 4y_1 - 4y_4 - 1y_5} \\
y_2 & = & -0.5 & + & 0.5y_1 & + & 1.5y_4 & + & 0.5y_5 \\
y_3 & = & 0.75 & + & 0.25y_1 & - & 0.25y_4 & - & 0.25y_5 \\
\multicolumn{9}{c}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}$$

Pivot: x_2 and x_5

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\multicolumn{7}{l}{\max\ 13 - 0.5x_3 - x_5} \\
x_1 & = & 3 & - & 0.5x_3 & + & x_5 \\
x_2 & = & 2 & + & 0.5x_3 & - & 2x_5 \\
x_4 & = & 1 & - & 0.5x_3 & + & 3x_5 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Führe gleichen Pivot-Schritt aus (y_5, y_2)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\multicolumn{9}{l}{\max\ -13 - 3y_1 - 2y_2 - 1y_4} \\
y_3 & = & 0.5 & + & 0.5y_1 & - & 0.5y_2 & + & 0.5y_4 \\
y_5 & = & 1 & - & y_1 & + & 2y_2 & - & 3y_4 \\
\multicolumn{9}{c}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}$$

zul. Basislsg.

- Simplex-Algorithmus löst gleichzeitig das duale LP
- Primale Basislösung immer feasible, duale Basislösung nur am Schluss

- **Weitere Wahlmöglichkeit:** Simplex mit primalem oder dualem LP

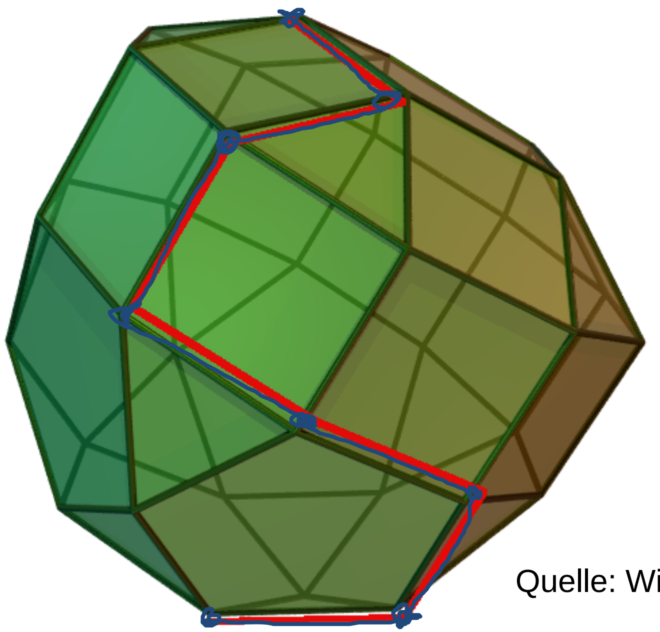
Verfahren zur linearen Programmierung

Simplex

- Löst LP exakt, ist in der Praxis oft sehr effizient
- Im worst case exponentiell
  - Polynomielles Pivot-Verfahren wäre ein sehr grosser Durchbruch

Geometrische Interpretation:

- Lösung ist immer eine Ecke des Polyeders und wird verbessert, indem mal entlang der Kanten des Polyeders “wandert”
  - Ein Pivot-Schritt = 1 Kante



Quelle: Wikipedia

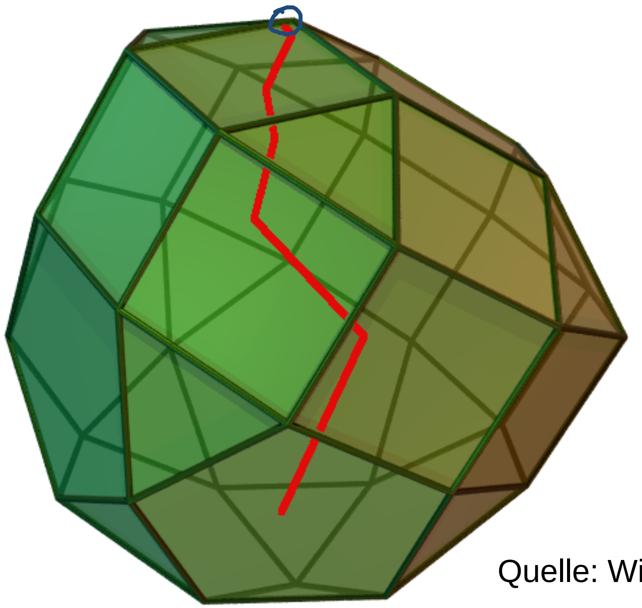
Verfahren zur linearen Programmierung

Innere Punkte Verfahren

- Löst LP näherungsweise (beliebig gut)
  - Falls die Lösung exakt genug ist, kann man am Schluss auch eine exakte, optimale Basislösung finden
- Laufzeit ist **polynomiell**!
  - In den benötigten Anzahl Bits, um alle Koeffizienten des LPs darzustellen
  - Algorithmus, welcher polynomiell in der Anz. Variablen und Gleichungen ist, ist ein grosses offenes Problem

Geometrische Interpretation:

- Wanderung im Inneren des Polyeders



Quelle: Wikipedia

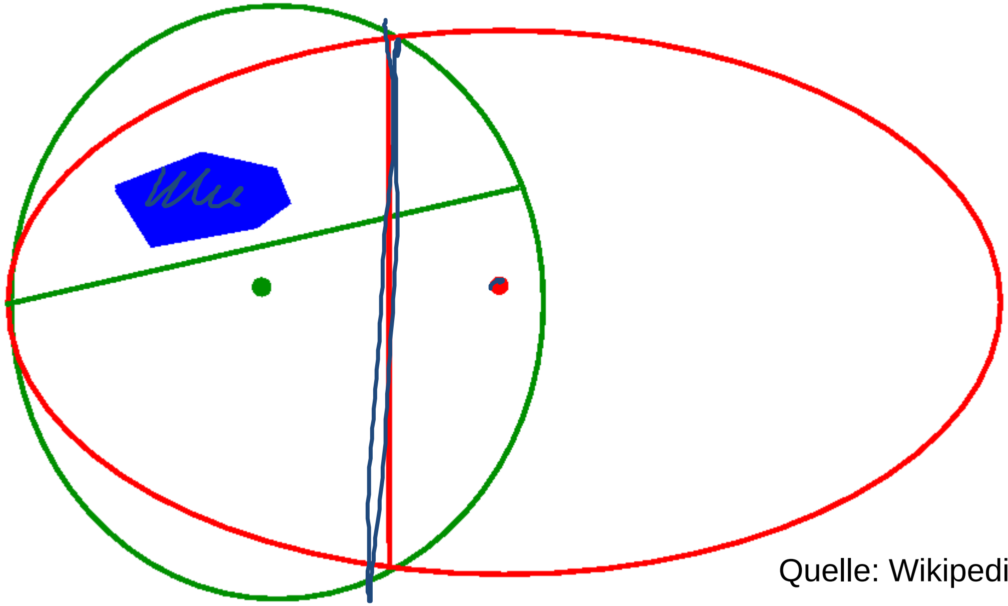
Verfahren zur linearen Programmierung

Ellipsoid-Methode

- Löst LP näherungsweise und hat polynomielle Laufzeit
  - Polynomiell in Anzahl Bits der Problem-Beschreibung (wie innere Pkte.)
- In der Theorie (und in der Praxis) den "Inneren Punkte"-Methoden klar unterlegen (in der Praxis auch dem Simplex-Algorithmus)
- Interessant aus theoretischer Sicht:
  - Kann z.T. LPs mit exponentiell vielen Nebenbed. in Polynomialzeit lösen
  - Lässt sich auf weitere Klassen konvexer Optimierungsprobleme anwenden

Geometrische Interpretation:

- Problem wird auf Finden einer zulässigen Lösg. reduziert
- Suchbereich wird durch exp. kleiner werdende Ellipsoide eingeschränkt



Quelle: Wikipedia

Zusammenfassung Lineare Programmierung

Lineares Programm

- Lineare Optimierungsaufgabe (lin. Zielfkt. und Nebenbed.)
- Spezialfall der konvexen Optimierung

Dualität

- Jedes LP hat ein duales LP mit gleichem opt. Zielfunktionswert
- Gibt elegante Art, Optimalität einer Lösung zu beweisen (und mehr...)

Algorithmen

- Simplex: elegant und effizient in der Praxis
- Innere Punkte / Ellipsoid: polynomielle Laufzeit!
- In der Praxis:
  - Matlab default: Innere Punkte Methode
  - Octave default: Simplex