Optimierung

Vorlesung 7

Lineare Programmierung II

Lineare Programme

Lineares Programm:

- Lineare Zielfunktion
- Lineare Nebenbedingungen (Gleichungen oder Ungleichungen)
- Spezialfall der konvexen Optimierung

Kanonische Form:

$$\begin{aligned} \max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Jedes LP kann in kanonische Form gebracht werden (Übung)

Lineares Programm kann entweder

- eine optimale Lösung haben
- unbeschränkt sein
- Unzulässig sein

Duales LP

Primales LP (kanonische Form):

$$\begin{aligned} \max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Duales LP:

$$\begin{aligned} \min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Theorem (Schwache Dualität):

Jede duale Lösung ist eine obere Schranke für die optimale primale Lösung. Das heisst, für alle zulässigen primalen und dualen Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ gilt:

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right)$$

- Korollar: Falls $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ gilt, sind beide Lösungen optimal.

Lemma von Farkas: Ein System $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ hat genau dann keine Lösung, wenn das System $\{\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \text{ und } \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \mathbf{0}\}$ eine Lösung hat.

Theorem (Starke Dualität):
Für optimale primale und duale Lösungen $\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{y}^*$ gilt $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$.

Beweis:

Schwache Dualität: $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq f \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \text{ keine Lsg.} \Longrightarrow A' = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c}^\top \\ A \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} -f \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \{A'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}', \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\} \text{ keine Lsg.}$$

Farkas: $\{\boldsymbol{z}' \geq 0, A'^\top \boldsymbol{z}' \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{b}'^\top \boldsymbol{z}' < \mathbf{0}\}$ hat Lsg., Def: $\boldsymbol{z}' \coloneqq \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{z} \coloneqq \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$

$$A'^\top z' = [-\boldsymbol{c} \quad A^\top] \begin{bmatrix} z_0 \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = -z_0 \boldsymbol{c} + A^\top \boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{b}'^\top \boldsymbol{z}' = -f z_0 + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{z}$$

$\{z_0 \geq 0, \boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}, A^\top \boldsymbol{z} \geq z_0 \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{z} < z_0 f\}$ hat eine Lösung

Starke Dualität

Lemma von Farkas: Ein System $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ hat genau dann keine Lösung, wenn das System $\{\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ und } \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}\}$ eine Lösung hat.

Theorem (Starke Dualität):
Für optimale primale und duale Lösungen $\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{y}^*$ gilt $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$.

Beweis:

Schwache Dualität: $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^*$

$$\boldsymbol{z}' := \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq f$
$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ hat keine Lsg. $\Longrightarrow \{z_0 \geq 0, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{z} \geq z_0 \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{z} < z_0 f\}$ hat Lsg.
$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

$z_0 = 0$: Farkas gibt $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ hat keine Lsg. (Widerspruch)

$z_0 > 0$: $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{z}/z_0 \Longrightarrow \{\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \boldsymbol{f}\}$ hat Lsg.

$$\forall f \in \mathbb{R}: \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* < f \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^* < f$$

Complementary Slackness

Satz vom komplementären Schlupf (complementary slackness):

Für zulässige Lösungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

1) $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sind optimale Lösungen
2) $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$
3) $\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0$ und $\boldsymbol{x}^\top(A^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}) = 0$

Zertifikat für Unzulässigkeit

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & -x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & -15 \\
\text{E3:} & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & & 0
\end{array}
$$

Positive Linearkombination von $\mathrm{E1}, \dots, \mathrm{E3}$:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{E1} + 1 \cdot \mathrm{E2} + 2 \cdot \mathrm{E3} =$$

Zertifikat für Unzulässigkeit

Lemma von Farkas: Ein System $\{A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ hat genau dann keine Lösung, wenn das System $\{\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ und } \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}\}$ eine Lösung hat.

Theorem: Jedes unzulässige LP hat ein solches Zertifikat für Unzulässigkeit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\mathrm{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\mathrm{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\mathrm{E3:} & & & -3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\mathrm{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

- Falls (x_1, x_2, x_3) zulässig ist, dann ist

  $$(x_1, x_2 + \alpha, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + \alpha \cdot (0,1,0)$$

  auch zulässig und die Zielfunktion nimmt um 4α zu.

- Die Richtung $(0,1,0)$ ist ein Zertifikat für die Unbeschränktheit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max & 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{E1:} & 2x_1 & & & & & \leq & 4 \\
\text{E2:} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
\text{E3:} & & & -3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
\text{E4:} & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq & & 0
\end{array}
$$

- Falls (x_1, x_2, x_3) zulässig ist, dann ist

$$(x_1, x_2, x_3) + \alpha \cdot (1,1,1)$$

auch zulässig und die Zielfunktion nimmt um α zu.

- Die Richtung $(1,1,1)$ ist ein Zertifikat für die Unbeschränktheit.

Zertifikat für Unbeschränktheit

Theorem (Zertifikat Unbeschränktheit): Ein LP

$$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}\,, \text{wobei } A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

ist genau dann unbeschränkt, falls es eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}$ und eine Richtung $\boldsymbol{z}$ gibt, so dass $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} > 0$.

Beweisidee:

- Folgt im Wesentlichen aus der Konvexität des zulässigen Bereichs
- Unbeschränktheit: Es gibt ein $\boldsymbol{z}$, so dass es für alle zulässigen $\boldsymbol{x_1}$ eine zulässige Folge $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots$ gibt, so dass

  $$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x_i} = \infty,$$

  sowie

  $$\lim_{i\to\infty} \frac{\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_1}}{\|\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_1}\|} = \boldsymbol{z}$$

- Konvexität: $\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{z}$ ist zulässig für alle zulässigen $\boldsymbol{x}$ und alle $\alpha \geq 0$

Dualität, Optimalität, Zulässigkeit und Unbeschränktheit

Theorem: Falls (P) ein LP ist und (D) das zugehörige duale LP ist, dann ist (P) auch das duale LP von (D). Zudem gilt genau eine der folgenden Bedingungen:

1) Die LP (P) und (D) sind beide zulässig und haben beide den gleichen optimalen Zielfunktionswert
2) Das LP (P) ist unzulässig und das LP (D) ist unbeschränkt
3) Das LP (P) ist unbeschränkt und das LP (P) ist unzulässig
4) Beide LP sind unzulässig

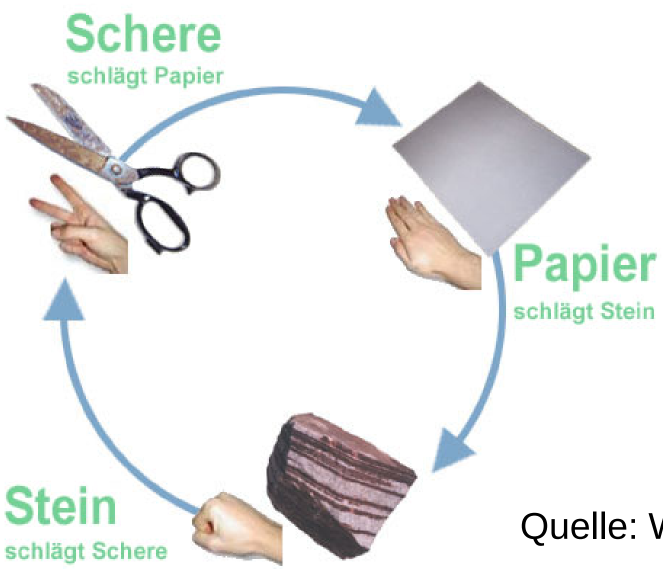
Duale lineare Programme

Primales LP	Duales LP
$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$	$\min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ $A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y}$ beliebig
$\max \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{x}$ beliebig	$\min \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$
$\max \ (\boldsymbol{c}^1)^\top \boldsymbol{x}^1 + (\boldsymbol{c}^2)^\top \boldsymbol{x}^2$ $A^{11}\boldsymbol{x}^1 + A^{12}\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{b}^1$ $A^{21}\boldsymbol{x}^1 + A^{22}\boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{b}^2$ $\boldsymbol{x}^1$ beliebig, $\boldsymbol{x}^2 \geq \boldsymbol{0}$	$\min \ (\boldsymbol{b}^1)^\top \boldsymbol{y}^1 + (\boldsymbol{b}^2)^\top \boldsymbol{y}^2$ $(A^{11})^\top \boldsymbol{y}^1 + (A^{21})^\top \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{c}^1$ $(A^{12})^\top \boldsymbol{y}^1 + (A^{22})^\top \boldsymbol{y}^2 \geq \boldsymbol{c}^2$ $\boldsymbol{y}^1$ beliebig, $\boldsymbol{y}^2 \geq \boldsymbol{0}$

Beispiel LP Dualität

Schere, Stein, Papier:

- 2 Spieler
- Beide wählen
  Schere, Stein oder Papier
- Stein schlägt Schere,
  Papier schlägt Stein,
  Schere schlägt Papier



Quelle: Wikipedia

Gewinnmatrix für Spieler 1:

	Schere	Stein	Papier
Schere	0	1	-1
Stein	-1	0	1
Papier	1	-1	0

Beispiel LP Dualität

Verallgemeinerte Gewinnmatrix:

	Schere	Stein	Papier
Schere	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-3}$
Stein	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{3}$
Papier	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$

Wie soll Spieler 1 spielen?

- Wahrscheinlichkeiten x_1, x_2, x_3 um Schere, Stein, Papier zu wählen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

- Kann man die Wahrscheinlichkeiten so wählen, dass ein gewisser Gewinn garantiert ist?

Beispiel LP Dualität

Verallgemeinerte Gewinnmatrix:

	Schere	Stein	Papier
Schere	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-3}$
Stein	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{3}$
Papier	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$

- Wahrscheinlichkeiten x_1, x_2, x_3 um Schere, Stein, Papier zu wählen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

- Erwarteter Gewinn garantiert mindestens g?

  Spieler 2 spielt
  - Schere: Erw. Gewinn $0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \geq g$
  - Stein: $-1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq g$
  - Papier: $1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \geq g$

Beispiel LP Dualität

Verallgemeinerte Gewinnmatrix:

	Schere	Stein	Papier
Schere	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-3}$
Stein	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{3}$
Papier	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$

Optimale Strategie:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & g & & & & & & \\
 & & & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & g \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & g \\
 & x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & g \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Beispiel LP Dualität

Optimale Strategie:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrr}
\max & g & & & & & & & \\
 & & & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & g \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & g \\
 & x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & g \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Kanonische Form:

Beispiel LP Dualität

Optimale Strategie, kanonische Form:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & g_1 - g_2 & & & & & & & & \\
& g_1 - g_2 & & & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 0 \\
& g_1 - g_2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 & \leq & 0 \\
& g_1 - g_2 & - & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 0 \\
& & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
& & & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & -1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad g_1 \geq 0, \quad g_2 \geq 0$$

Duales LP:

Beispiel LP Dualität

Optimale Strategie, kanonische Form:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & g_1 - g_2 & & & & & & & & \\
& g_1 - g_2 & & & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 0 \\
& g_1 - g_2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 & \leq & 0 \\
& g_1 - g_2 & - & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 0 \\
& & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
& & & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & -1
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad g_1 \geq 0, \qquad g_2 \geq 0$$

Duales LP:

Beispiel LP Dualität

Duales LP:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & v & & & & & & \\
 & & & -y_2 & + & y_3 & \leq & v \\
 & 2y_1 & & & - & 2y_3 & \leq & v \\
 & -3y_1 & & 3y_2 & & & \leq & v \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 1 \\
 & y_1 \geq 0, & & y_2 \geq 0, & & y_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Gewinnmatrix von Spieler 1:

	Schere	Stein	Papier
Schere	0	2	-3
Stein	-1	0	3
Papier	1	-2	0

- **Optimale duale Lösung: optimale Strategie von Spieler 2**

LP Dualität und Nullsummen-Matrixspiele

Matrixspiele:

- 2 Spieler
- Gewinn kann wie bei Schere-Stein-Papier durch Matrix dargestellt werden
- Nullsummenspiel: Gewinn Spieler 1 = Verlust Spieler 2

Als lineare Programme:

- Optimale Strategie von Spieler 1 kann als LP dargestellt werden
- Optimale Strategie von Spieler 2 gegeben durch das duale LP

Starke Dualität:

- Optimale Strategien haben gleichen Gewinn/Verlust
- Kann man zeigen: optimale Strategien sind Nash-Equilibrium
  - Kann rel. leicht mit Satz des komplemenären Schlupfs gezeigt werden...
- Insbesondere: Matrixspiele haben immer ein (gemischtes) Nash-Equil.
  - Gilt für alle Nullsummenspiele...