

Optimierung

Vorlesung 8

Lineare Programmierung III: Simplex Algorithmus

Primales LP:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
 & 2x_1 \leq 4 \\
 & x_1 + 2x_3 \leq 8 \\
 & 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Duales LP:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \\
 & 2y_1 + y_2 \geq 3 \\
 & 3y_3 \geq 4 \\
 & 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
 & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Optimale Lösungen:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2, & x_2 &= 1, & x_3 &= 3 \\
 y_1 &= \frac{4}{3}, & y_2 &= \frac{1}{3}, & y_3 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Kanonische Form:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
 & 2x_1 & & & & & & \leq 4 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & & \leq 8 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & & \leq 6 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & & &
 \end{array}$$

Standardform:

Transformiere alle Ungleichungen in Gleichungen

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & \\
 & 2x_1 & & & & & + & w_1 & = & 4 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & + & w_2 & = & 8 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & + & w_3 & = & 6 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & w_1 \geq 0 & w_2 \geq 0 & w_3 \geq 0 & & &
 \end{array}$$

- w_1, w_2, w_3 heissen Schlupfvariablen (slack variables)

Als «Dictionary» (nach Schlupfvariablen aufgelöst):

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ w_1 = \quad & 4 - 2x_1 \\ w_2 = \quad & 8 - x_1 - 2x_3 \\ w_3 = \quad & 6 - 3x_2 - x_3 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Basis: Variablen auf der linken Seite
- Basislösung:
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad w_1 = 4 \quad w_2 = 8 \quad w_3 = 6$$
- Beim gegebenen LP ist die Basislösung zulässig
 - Wir werden sehen, dass dies immer möglich ist (wenn das LP zulässig ist)
- Zielfunktionswert: 0
- Verbessern der gegebenen Lösung: erhöhe x_1 , x_2 oder x_3

Lineares Programm:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ w_1 \quad &= 4 - 2x_1 \\ w_2 \quad &= 8 - x_1 - 2x_3 \\ w_3 \quad &= 6 - 3x_2 - x_3 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $w_1 = 4$, $w_2 = 8$, $w_3 = 6$

Erhöhe $x_1 \Rightarrow x_1 = 2$:

- Führt zu $w_1 = 0$
- Idee: Wenn wir die Rolle von x_1 und w_1 vertauschen, haben wir wieder eine Basislösung ($w_1 = x_2 = x_3 = 0$)
- Löse erste Gleichung nach x_1 auf...

Lineares Programm:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ w_1 = \quad & 4 - 2x_1 \\ w_2 = \quad & 8 - x_1 - 2x_3 \\ w_3 = \quad & 6 - 3x_2 - x_3 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Basiswechsel: Vertausche Rollen von x_1 und w_1 : $x_1 = 8 - 2x_3 - w_2$

Lineares Programm:

$$\max 6 - \frac{3}{2}w_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}w_1$$

$$w_2 = 6 + \frac{1}{2}w_1 - 2x_3$$

$$w_3 = 6 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Pivot: Erhöhe x_2 (x_2 wird zu Basisvar.), w_3 verlässt Basis

Lineares Programm:

$$\max 14 - \frac{3}{2}w_1 - \frac{4}{3}w_3 + \frac{2}{3}x_3$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}w_1$$

$$w_2 = 6 + \frac{1}{2}w_1 - 2x_3$$

$$x_2 = 6 - \frac{1}{3}w_3 - \frac{1}{3}x_3$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Pivot: Erhöhe x_3 (x_3 wird zu Basisvar.), w_2 verlässt Basis

Lineares Programm:

$$\max 16 - \frac{4}{3}w_1 - \frac{4}{3}w_3 - \frac{1}{3}w_2$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}w_1$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{12}w_1 - \frac{1}{3}w_3 + \frac{1}{6}w_2$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0$$

Optimale Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

Zielfunktionswert: 16

Zur Erinnerung:

- Optimale Lösung des dualen LP: $y_1 = \frac{4}{3}$, $y_2 = \frac{1}{3}$, $y_3 = \frac{4}{3}$

LP in “Dictionary”-Form:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_0 + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Falls $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ eine zulässige Basislösung

- Zielfunktionswert: c_0

Pivot-Schritt:

- Wähle eine Variable x_i aus $\mathbf{x}_N$ mit Koeffizienten $c_i > 0$
- Erhöhe x_i bis erstes $x_j \in \mathbf{x}_B$ Null wird
- Vertausche Rolle von x_i und x_j (x_i neu in der Basis, $x_j = 0$ aus Basis raus)
- Pivot-Schritt **kann c_0 nicht verkleinern** und **erhält $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$**

Lösung: Falls $\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$, dann ist Basislösung $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ optimal.

«Dictionary»:

$$\max 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5$$

$$x_6 = 1 - x_1 - x_3 - x_4$$

$$x_7 = 1 - x_1 - x_2 - x_4$$

$$x_8 = 1 - x_2 - x_3$$

$$x_9 = 1 - x_4 - x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Dictionary ist zulässig:
 - Zul. Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 1$
- Vergrössere x_4 (grösster Koeffizient) $\Rightarrow x_4 = 1$ (z.B. x_6 verlässt Basis)

«Dictionary»:

$$\max 7 - 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_5 - 7x_6$$

$$x_4 = 1 - x_1 - x_3 - x_6$$

$$x_7 = 0 - x_2 + x_3 + x_6$$

$$x_8 = 1 - x_2 - x_3$$

$$x_9 = 0 + x_1 + x_3 - x_5 + x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Variablen aus Nichtbasis, welche erhöht werden können: x_2, x_5
- Man kann beide nicht erhöhen (ohne, dass x_7 oder $x_9 < 0$ werden)
- Falls wir x_2 nehmen, wird x_7 “zuerst” Null

«Dictionary»:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7 \\ x_4 = \quad & 1 - x_1 - x_3 - x_6 \\ x_2 = \quad & 0 + x_3 + x_6 - x_7 \\ x_8 = \quad & 1 - 2x_3 - x_6 + x_7 \\ x_9 = \quad & 0 + x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{aligned}$$

- Zielfunktionswert hat sich nicht verändert (Wert: 7)

→ degeneriertes Pivot

- Mehrere degenerierte Pivots können allenfalls zum gleichen Dictionary zurückführen (→ Algorithmus terminiert nicht)
- Kann verhindert werden, indem das Pivot geschickt gewählt wird

«Dictionary»:

$$\max 7 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7$$

$$x_4 = 1 - x_1 - x_3 - x_6$$

$$x_2 = 0 + x_3 + x_6 - x_7$$

$$x_8 = 1 - 2x_3 - x_6 + x_7$$

$$x_9 = 0 + x_1 + x_3 - x_5 + x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Wähle x_3 als nächste Variable (x_8 ist erste Var., welche Null wird)

«Dictionary»:

$$\max 8 - 3x_1 + x_5 - 3x_6 - 4x_7 - x_8$$

$$x_4 = 0.5 - x_1 - 0.5x_6 - 0.5x_7 + 0.5x_8$$

$$x_2 = 0.5 + 0.5x_6 - 0.5x_7 - 0.5x_8$$

$$x_3 = 0.5 - 0.5x_6 + 0.5x_7 - 0.5x_8$$

$$x_9 = 0.5 + x_1 - x_5 + 0.5x_6 + 0.5x_7 - 0.5x_8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- Wähle x_5 als nächste Variable (x_9 ist erste Var., welche Null wird)

$$\max 8.5 - 2x_1 - 2.5x_6 - 3.5x_7 - 1.5x_8 - x_9$$

$$x_4 = 0.5 - x_1 - 0.5x_6 - 0.5x_7 + 0.5x_8$$

$$x_2 = 0.5 + 0.5x_6 - 0.5x_7 - 0.5x_8$$

$$x_3 = 0.5 - 0.5x_6 + 0.5x_7 - 0.5x_8$$

$$x_5 = 0.5 + x_1 + 0.5x_6 + 0.5x_7 - 0.5x_8 - x_9$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

Bemerkungen:

- Jede Variable x_i , welche in der Zielfunktion einen positiven Koeffizienten hat, kann gewählt werden, um in die Basis zu wechseln
- Vertausche x_i mit einer, der Basisvariablen x_j , welche zuerst Null wird
- **Pivot-Auswahlregel:** Auswahl des Pivots, falls es mehrere Möglichkeiten gibt
- Solange **kein degeneriertes Pivot** auftritt, nimmt der Zielfunktionswert zu
 - Anzahl verschiedener Basen ist endlich
 - **Algorithmus konvergiert** (oder man findet ein Zertifikat f. Unbeschränktheit)
- Anzahl Iterationen:
 - In der Praxis meistens klein, kann i.A. exponentiell sein
 - Man kennt keine Pivot-Regel, für welche die Anzahl Iter. polynomiell ist (wichtiges offenes Problem!)

Um Terminierung zu garantieren, benötigen wir Pivot-Auswahlregel, welche degenerierte Pivots vermeidet

Bland'sche Auswahlregel:

- Bei mehreren Möglichkeiten, wähle immer Variable mit kleinstem Index

Lexikographische Auswahlregel:

- **Idee:** Falls die Koeffizienten ein bisschen perturbiert werden, sollte sich nichts an der optimalen Lösung ändern, aber die Pivots sollten nicht mehr degeneriert sein
- Kann systematisch gemacht werden
- Ersetze $\mathbf{b}$ durch $\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$, wobei

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{pmatrix}, \text{ so dass } 0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \dots \ll \epsilon_m \ll 1$$

Degeneriertes Pivot:

$$\max 7 - 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_5 - 7x_6$$

$$x_4 = 1 + \epsilon_1 - x_1 - x_3 - x_6$$

$$x_7 = \epsilon_2 - x_2 + x_3 + x_6$$

$$x_8 = 1 + \epsilon_3 - x_2 - x_3$$

$$x_9 = \epsilon_4 + x_1 + x_3 - x_5 + x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

- x_2 kann jetzt auf ϵ_2 erhöht werden:

“Degenerierter Schritt” inkl. ϵ :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 7 + 5\epsilon_2 - 3x_1 + 2x_3 + x_5 - 2x_6 - 5x_7 \\
 x_4 = \quad & 1 + \epsilon_1 - x_1 - x_3 - x_6 \\
 x_2 = \quad & \epsilon_2 + x_3 + x_6 - x_7 \\
 x_8 = \quad & 1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - 2x_3 - x_6 + x_7 \\
 x_9 = \quad & \epsilon_4 + x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Zielfunktionswert hat sich um $5\epsilon_5$ erhöht
- $0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \dots \ll \epsilon_m$ garantiert, dass die konstanten Terme nie Null werden können
 - Pivot's können nicht degeneriert sein
- ϵ_i sind abstrakte, beliebig kleine Grössen, welche am Schluss einfach ignoriert werden... (durch 0 ersetzen)

- Stellt man fest, wenn es eine Variable gibt, welche beliebig erhöht werden kann.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 = \quad & 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = \quad & 1 + x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \max \quad & 3 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_1 = \quad & 1 + x_2 - x_3 \\ x_4 = \quad & 2 - x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- x_2 kann beliebig erhöht werden $\rightarrow$ LP ist unbeschränkt

Bis jetzt: Erste Basislösung ist zulässig

- Was tun, falls nicht?

Kann auch als LP formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 &\max \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 \\
 x_4 &= 20 - x_1 - x_2 - x_3 \\
 x_5 &= -5 + 2x_1 + x_2 - x_3 \\
 x_6 &= -10 - x_2 + x_3 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Ersetze Zielfunktion durch $-x_0$ und addiere x_0 zu jeder Gleichung:

$$\begin{aligned}
 &\max \quad -x_0 \\
 x_4 &= 20 - x_1 - x_2 - x_3 + x_0 \\
 x_5 &= -5 + 2x_1 + x_2 - x_3 + x_0 \\
 x_6 &= -10 - x_2 + x_3 + x_0 \\
 &x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Zulässige Lösung finden:

$$\max -x_0$$

$$x_4 = 20 - x_1 - x_2 - x_3 + x_0$$

$$x_5 = -5 + 2x_1 + x_2 - x_3 + x_0$$

$$x_6 = -10 - x_2 + x_3 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Zulässige Lösung finden:

$$\max -10 - x_2 + x_3 - x_6$$

$$x_4 = 30 - x_1 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 5 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_6$$

$$x_0 = 10 + x_2 - x_3 + x_6$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

- Basislösung ist zulässig
- Optimaler Zielfunktionswert ist genau dann 0, wenn das ursprüngliche LP zulässig ist
- Falls die optimale Lösung Wert 0 hat, dann ist $x_0 = 0$
- Deshalb ist x_0 nicht in der Basis
 - oder kann mit Pivot-Schritt aus der Basis genommen werden
- Wenn x_0 ignoriert wird, bekommt man damit eine Basislösung des ursprünglichen LPs
- Wird üblicherweise als Phase 1 des Simplex-Alg. bezeichnet

Wie sieht der duale «Dictionary» aus?

Primales LP

$$\begin{aligned}\max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ x_3 = \quad & 16 - 4x_1 - 2x_2 \\ x_4 = \quad & 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = \quad & 5 - x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{aligned}$$

Pivot: x_1 and x_3 **Duales LP**

$$\begin{aligned}\max \quad & -16y_3 - 8y_4 - 5y_5 \\ y_1 = \quad & -3 + 4y_3 + y_4 + y_5 \\ y_2 = \quad & -2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0\end{aligned}$$

Führe gleichen Pivot-Schritt aus (y_3, y_1)

Primales LP

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 12 + 0.5x_2 - 0.75x_3 \\
 x_1 = \quad & 4 - 0.5x_2 - 0.25x_3 \\
 x_4 = \quad & 4 - 1.5x_2 + 0.25x_3 \\
 x_5 = \quad & 1 - 0.5x_2 + 0.25x_3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Pivot: x_2 and x_5

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 13 - 0.5x_3 - x_5 \\
 x_1 = \quad & 3 - 0.5x_3 + x_5 \\
 x_2 = \quad & 2 + 0.5x_3 - 2x_5 \\
 x_4 = \quad & 1 - 0.5x_3 + 3x_5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Duales LP

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -12 - 4y_1 - 4y_4 - 1y_5 \\
 y_2 = \quad & -0.5 + 0.5y_1 + 1.5y_4 + 0.5y_5 \\
 y_3 = \quad & 0.75 + 0.25y_1 - 0.25y_4 - 0.25y_5 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Führe gleichen Pivot-Schritt aus (y_5, y_2)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -13 - 3y_1 - 2y_2 - 1y_4 \\
 y_3 = \quad & 0.5 + 0.5y_1 - 0.5y_2 + 0.5y_4 \\
 y_5 = \quad & 1 - y_1 + 2y_2 - 3y_4 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

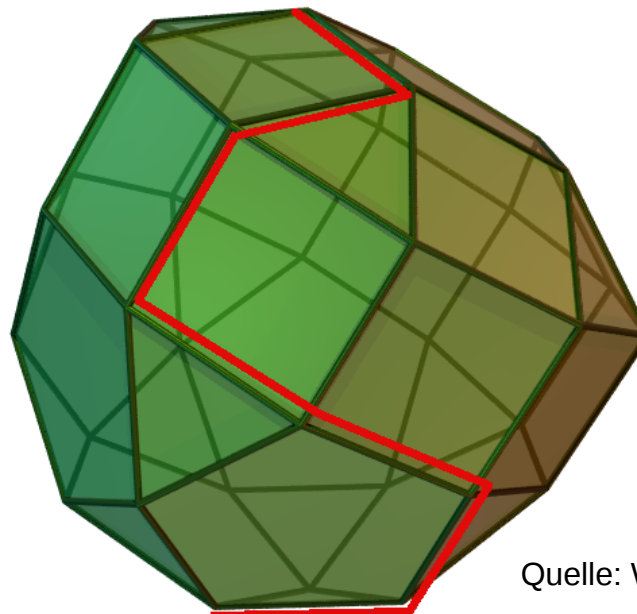
- Simplex-Algorithmus löst gleichzeitig das duale LP
- Primale Basislösung immer feasible, duale Basislösung nur am Schluss
- **Weitere Wahlmöglichkeit:** Simplex mit primalem oder dualem LP

Simplex

- Löst LP exakt, ist in der Praxis oft sehr effizient
- Im worst case exponentiell
 - Polynomielles Pivot-Verfahren wäre ein sehr grosser Durchbruch

Geometrische Interpretation:

- Lösung ist immer eine Ecke des Polyeders und wird verbessert, indem man entlang der Kanten des Polyeders “wandert”
 - Ein Pivot-Schritt = 1 Kante



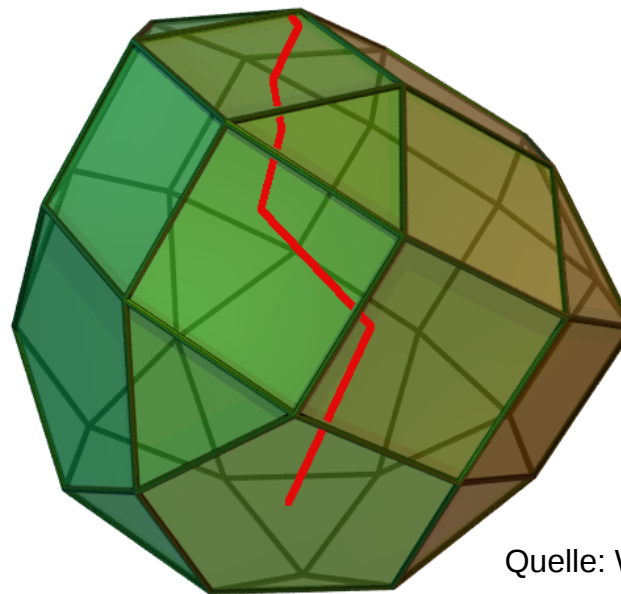
Quelle: Wikipedia

Innere Punkte Verfahren

- Löst LP näherungsweise (beliebig gut)
 - Falls die Lösung exakt genug ist, kann man am Schluss auch eine exakte, optimale Basislösung finden
- Laufzeit ist **polynomiell!**
 - In den benötigten Anzahl Bits, um alle Koeffizienten des LPs darzustellen
 - Algorithmus, welcher polynomiell in der Anz. Variablen und Gleichungen ist, ist ein grosses offenes Problem

Geometrische Interpretation:

- Wanderung im Inneren des Polyeders



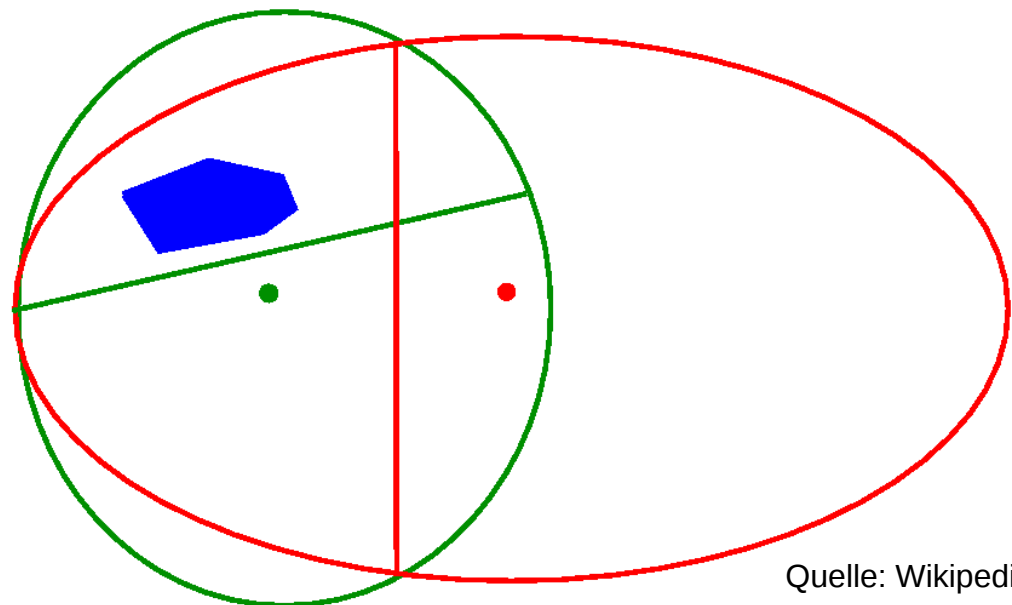
Quelle: Wikipedia

Ellipsoid-Methode

- Löst LP näherungsweise und hat polynomielle Laufzeit
 - Polynomiell in Anzahl Bits der Problem-Beschreibung (wie innere Pkte.)
- In der Theorie (und in der Praxis) den “Inneren Punkte”-Methoden klar unterlegen (in der Praxis auch dem Simplex-Algorithmus)
- Interessant aus theoretischer Sicht:
 - Kann z.T. LPs mit exponentiell vielen Nebenbed. in Polynomialzeit lösen
 - Lässt sich auf weitere Klassen konvexer Optimierungsprobleme anwenden

Geometrische Interpretation:

- Problem wird auf Finden einer zulässigen Lösg. reduziert
- Suchbereich wird durch exp. kleiner werdende Ellipsoide eingeschränkt



Quelle: Wikipedia

Lineares Programm

- Lineare Optimierungsaufgabe (lin. Zielfkt. und Nebenbed.)
- Spezialfall der konvexen Optimierung

Dualität

- Jedes LP hat ein duales LP mit gleichem opt. Zielfunktionswert
- Gibt elegante Art, Optimalität einer Lösung zu beweisen (und mehr...)

Algorithmen

- Simplex: elegant und effizient in der Praxis
- Innere Punkte / Ellipsoid: polynomielle Laufzeit!
- In der Praxis:
 - Matlab default: Innere Punkte Methode
 - Octave default: Simplex