Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn, Oleksii Saukh 22.08.2013

Einführung in die Optimierung

Sommersemester 2013

Übungsblatt 5 – Musterlösung

Übung 1: Set Cover

a) Wir definieren eine Variable x_i ($i = 1, \ldots, n$) für jede Menge $S_i \in \mathcal{S}$, so dass jede Variable x_i nur die Werte 0 und 1 annehmen kann. Die Variablen definieren dann auf natürliche Weise eine Teilmenge $C \subseteq \mathcal{S}$, so dass $S_i \in C$ genau dann, wenn $x_i = 1$. Damit C ein gültiges Set Cover ist, muss jedes Element $j \in X$ in mindestens einer Menge $S_i \in C$ sein. Wir können dies folgendermassen durch eine lineare Ungleichung in den Variablen x_i ausdrücken:

$$\forall j \in X : \sum_{i:j \in S_i} x_i \geq 1. \tag{1}$$

Um ein möglichst kleines Set Cover zu erhalten, müssen wir das Gesamtgewicht der Mengen in C und daher die Summer aller $w_i x_i$ minimieren. Für die restliche Aufgabe ist es hilfreich, das ILP in Matrixschreibweise zu haben. Nehmen wir an, dass die Menge X, $|X| = m$ Elemente enthält. Wir definieren eine $m \times n$-Matrix A (Zeile j entspriche Element $j \in X$, Spalte i enspricht der Menge S_i). Die Einträge von A sind entweder 0 oder 1, wobei $a_{ji} = 1$ genau dann, wenn $j \in S_i$ (a_{ji} bezeichnet das Element in Zeile j und Spalte i). Die Bedingung (1) entspricht dann der Ungleichung $A \cdot \boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}$, wobei $\boldsymbol{x}$ dem Vektor $(x_1, \ldots, x_n)^\top$ und $\mathbf{1}$ dem 1-Vektor entsprechen. Als Integer LP erhalten wir deshalb

$$\begin{array}{lrcl} \min & \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} & & \\ & A\boldsymbol{x} & \geq & \mathbf{1} \\ & x_i & \in & \{0,1\} \;\; (\forall i \in \{1, \ldots, n\}), \end{array} \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{w}$ dem Vektor $(w_1, \ldots, w_n)^\top$ entspricht.

b) Das Problem, einen Preis $p_j \geq 0$ für jedes Element $j \in X$ zu finden, so dass der Gesamtpreis aller Elemente maximiert wird, kann als LP aufgeschrieben werden. Betrachte die folgende $n \times m$-Matrix B. Alle Einträge von B sind 0 oder 1, das Element b_{ij} in Zeile i und Spalte j ist 1 genau dann, wenn $j \in S_i$. Für den Preisvektor $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)^\top$ benötigen wir für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass die Summe der Preise p_j aller $j \in S_i$ höchstens w_i ist. In Matrixschreibweise kann dies als $B \cdot \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{w}$ ausgedrückt werden. Wir erhalten deshalb das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcl} \max & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{p} & & \\ & B\boldsymbol{p} & \leq & \boldsymbol{w} \\ & \boldsymbol{p} & \geq & 0 \end{array} \tag{3}$$

Da $B = A^\top$ gilt, ist das duale LP zum LP in (3) genau das Set Cover LP in (2), wenn man die Bedingungen $x_i \in \{0,1\}$ durch $x_i \geq 0$ ersetzt. Es folgt deshalb aus der Dualität, dass die optimalen Lösungen der beiden LPs den gleichen Zielfunktionswert haben. Und da die Bedingung $x_i \in \{0,1\}$ die Variablen x_i zusätzlich einschränkt, kann ein optimales Set Cover daher nicht kleiner sein.

Übung 2: Minimale Spannende Bäume

Ein minimaler Spannbaum kann alternativ als eine Teilmenge E' der Kanten E eines gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$, $w(e) > 0$, definiert werden, so dass a) die Menge E' der Kanten alle Knoten von G miteinander verbindet und b) die Kantenmenge E' minimales Gewicht unter allen Kantenmengen hat, welche a) erfüllen. Eine natürliche Art, dies als Integer LP auszudrücken besteht deshalb darin, für jede Kante e eine Variable $y_e \in \{0, 1\}$ einzuführen, so dass $y_e = 1$ bedeutet, dass e Teil des MSTs ist (in der Menge E' ist). Wir wollen die Summe der $w(e) \cdot y_e$ minimieren, unter der Nebenbedingung, dass die Kanten für welche $y_e = 1$ ist, alle Knoten miteinander verbinden.
Falls der Graph $G' = (V, E')$ nicht zusammenhängend ist und deshalb aus mehreren Komponenten besteht, dann gibt es eine Teilmenge $S \subseteq V$, $S \notin \{\emptyset, V\}$, so dass *keine* Kante in E' S mit $V \setminus S$ verbindet. Oder anders ausgedrückt, falls es für jede solche Teilmenge $S \subseteq V$ eine Kante $\{u, v\} \in E'$ gibt, so dass $|\{u, v\} \cap S| = 1$ (die Kante verbindet S mit $V \setminus S$), dann ist $G' = (V, E')$ zusammenhängend. Es ist auch klar, dass für jede solche Menge S eine Kante $\{u, v\} \in E'$ mit $|\{u, v\} \cap S| = 1$ existieren muss, damit $G' = (V, E')$ zusammenhängend ist. Die Kantenmenge E' verbindet daher alle Knoten in V genau dann, wenn

$$\forall S \subseteq V, S \notin \{\emptyset, V\} : \sum_{\{u,v\} \in E : |\{u,v\} \cap S| = 1} y_e \geq 1.$$

Zusammen mit der linearen Zielfunktion $\sum_{e \in E} w(e) \cdot y_e$, welche minimiert werden soll und den Bedingungen $y_e \in \{0, 1\}$ erhalten wir damit eine Integer LP Formulierung des MST Problems.