Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 8 (27.5.2014)

Hashtabellen II

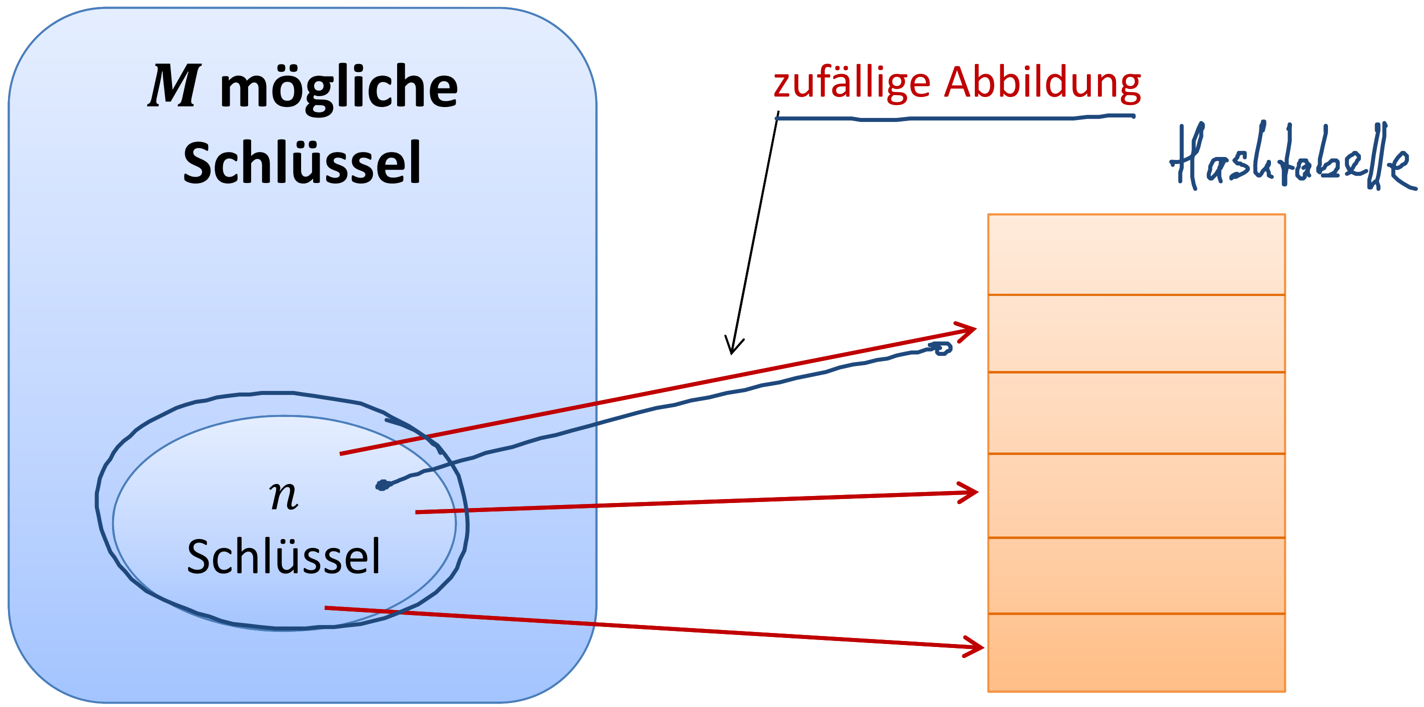
Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Hashing : Idee

Problem

- Riesiger Raum S, $|S| = M$ an möglichen Schlüsseln
- Anzahl n der wirklich benutzten Schlüssel ist **viel** kleiner
  - Wir möchten nur Arrays der Grösse $\approx n$ (resp. $O(n)$) verwenden…
- Wie können wir M Schlüssel auf $O(n)$ Array-Positionen abbilden?



Hashfunktionen

Schlüsselraum $\boldsymbol{S}$, $|\boldsymbol{S}| = \boldsymbol{M}$ (alle möglichen Schlüssel)

Arraygrösse $\boldsymbol{m}$ ($\approx$ Anz. Schlüssel, welche wir max. speichern wollen)

$h(x)$

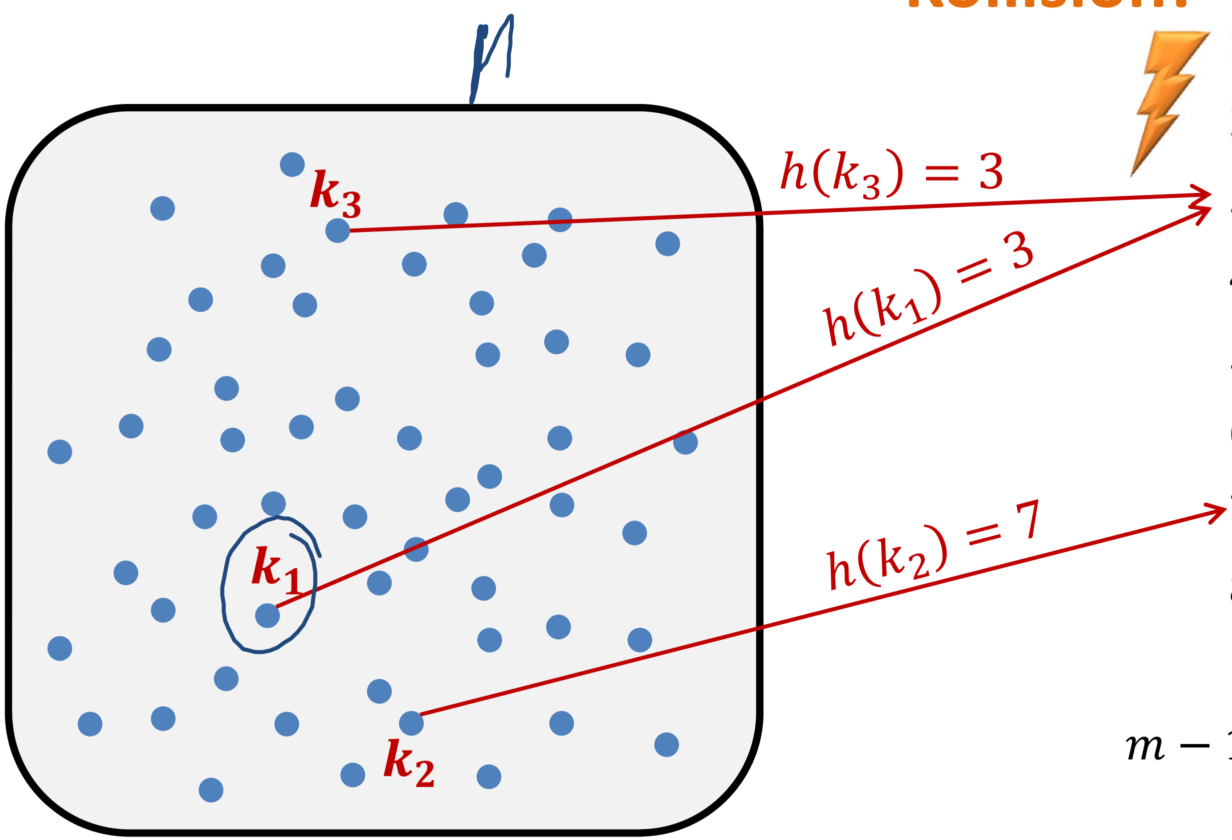
Hashfunktion

$$\boldsymbol{h: \underline{S} \to \underline{\{0, \dots, m-1\}}}$$

- Bildet Schlüssel vom Schlüsselraum S in Arraypositionen ab
- h sollte möglichst nahe bei einer zufälligen Funktion sein
  - alle Elemente in $\{0, \dots, m-1\}$ etwa gleich vielen Schlüsseln zugewiesen sein
  - ähnliche Schlüssel sollten auf verschiedene Positionen abgebildet
- h sollte möglichst schnell berechnet werden können
  - Wenn möglich in Zeit $O(1)$
  - Wir betrachten es im folgenden als Grundoperation (Kosten = 1)

Funktionsweise Hashtabellen

1. *insert*(k_1, v_1)
2. *insert*(k_2, v_2)
3. *insert*(k_3, v_3)



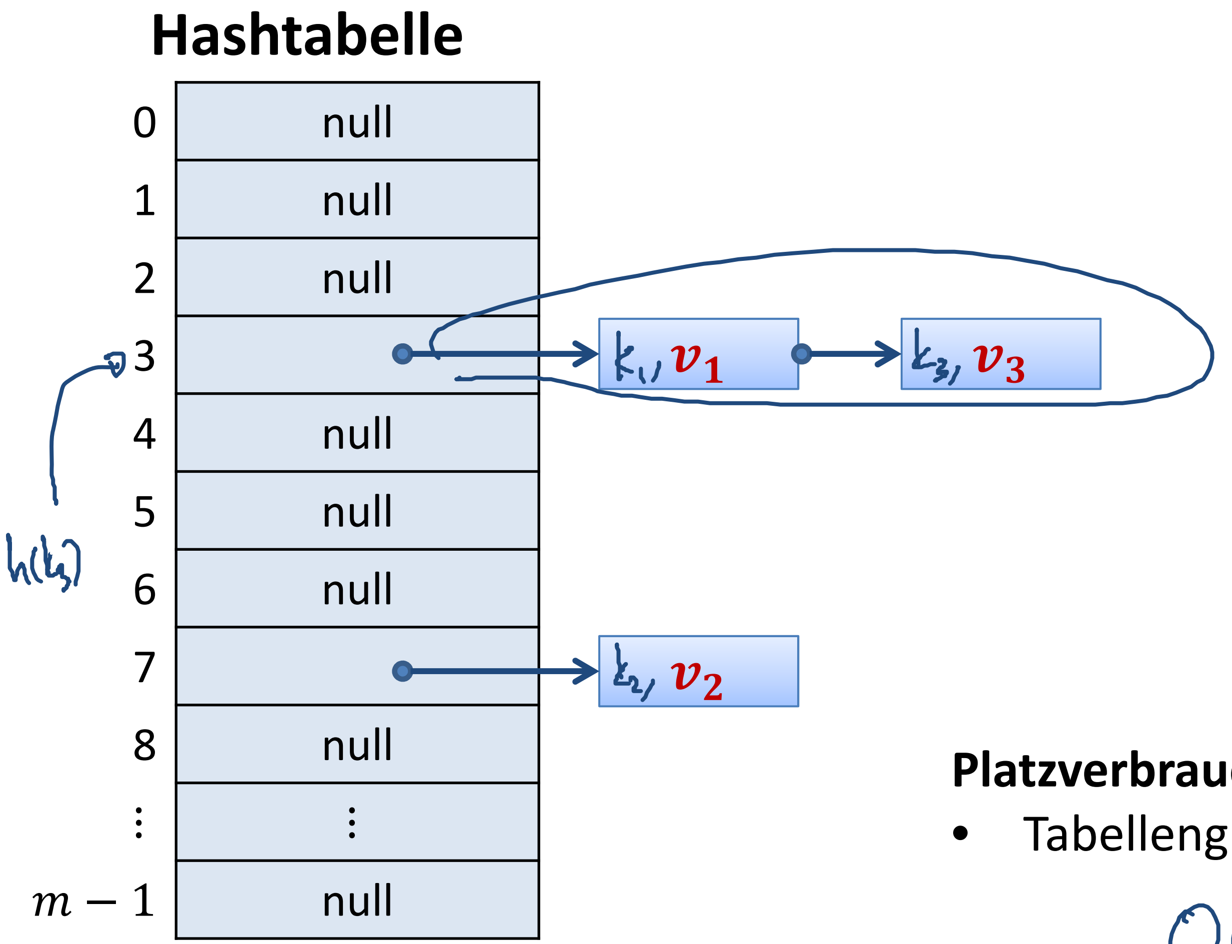
Hashtabelle

0	null
1	null
2	null
3	k_1, v_1
4	null
5	null
6	null
7	v_2
8	null
⋮	⋮
$m-1$	null

$m << M$

Hashtabellen mit Chaining

- Jede Stelle in der Hashtabelle zeigt auf eine verkette Liste



Platzverbrauch:
- Tabellengrösse m, Anz. Elemente n

$O(m+n)$

Laufzeit Hashtabellen-Operationen

Zuerst, um's einfach zu machen, für den Fall ohne Kollisionen…

create: $O(1)$

insert: $O(1)$

find: $O(1)$

delete: $O(1)$

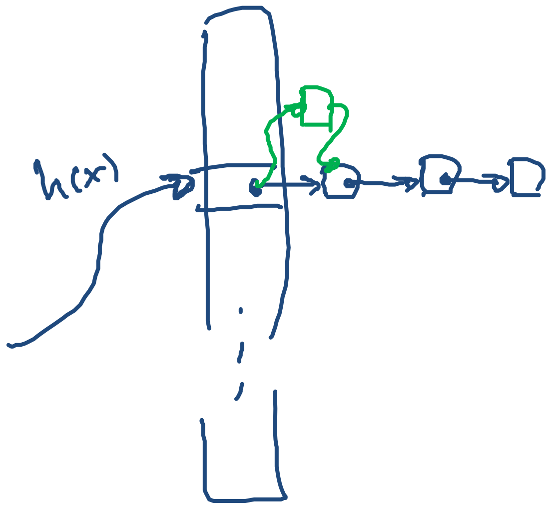
- Solange keine Kollisionen auftreten, sind Hashtabellen extrem schnell (falls die Hashfunktion schnell ausgewertet werden kann)
- Wir werden sehen, dass dies auch mit Kollisionen gilt…

Laufzeit mit Chaining

Verkettete Listen an allen Positionen der Hashtabelle

create: $O(1)$

insert: $O(1)$



find: $O(\text{Länge der entsprechenden Liste})$

worst case

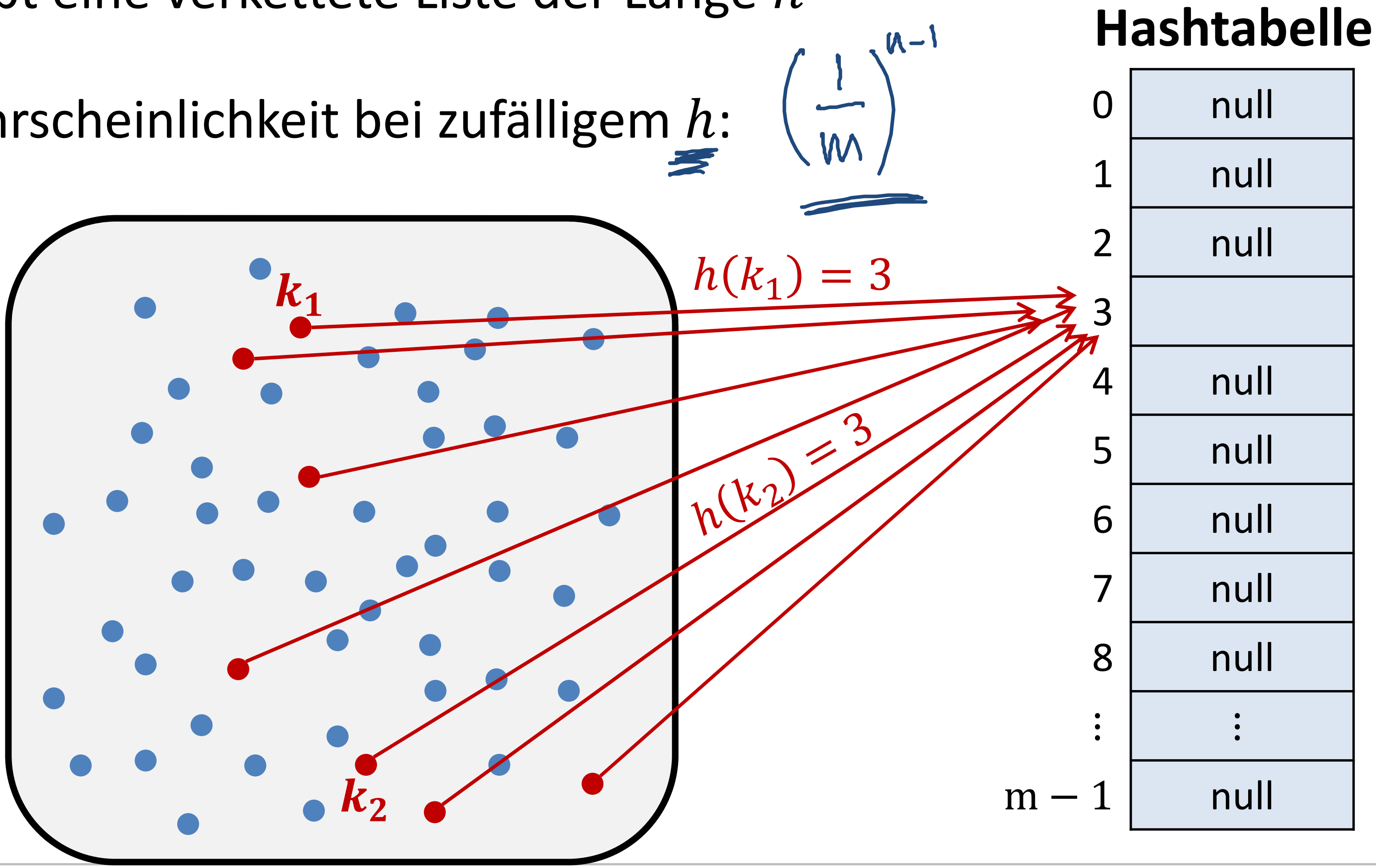
$\Theta(n)$

delete: $O(\text{Länge der entsprechenden Liste})$

Funktionsweise Hashtabellen

Schlechtester Fall bei Hashing mit Chaining

- Alle Schlüssel, welche vorkommen, haben den gleichen Hashwert
- Ergibt eine verkettete Liste der Länge n
- Wahrscheinlichkeit bei zufälligem h: $\left(\frac{1}{m}\right)^{n-1}$



Länge der verketten Liste

$M \gg m$

- Kosten von *find* und *delete* hängt von der Länge der entprechenden Liste ab

$n \leq f(m)$

- Wie lang werden die Listen
  - Annahme: Grösse der Hashtabelle m, Anzahl Elemente n
  - Weitere Annahme: Hashfunktion h verhält sich wie zufällige Funktion

- Listenlängen entspricht folgendem Zufallsexperiment

bins balls

$n \in O(m)$ $n \leq c \cdot m$

m Urnen und n Kugeln

- Jede Kugel wird (unabhängig) in eine zufällige Urne geworfen

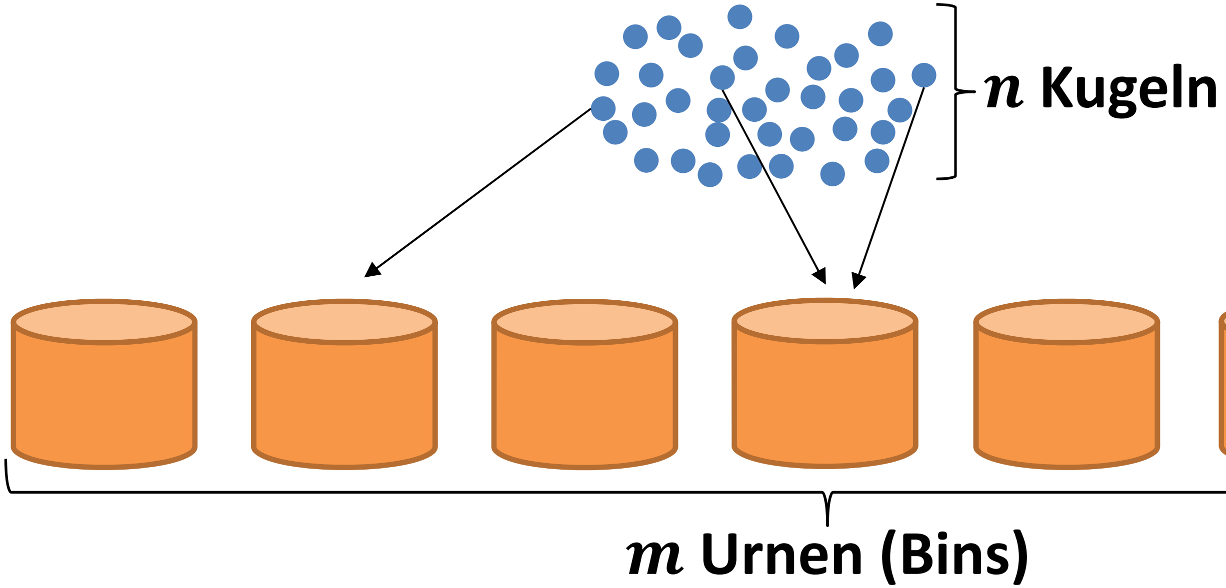
- Längste Liste = maximale Anz. Kugeln in der gleichen Urne

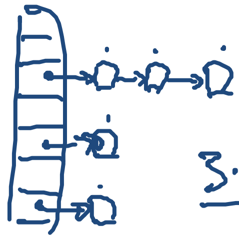
- Durchschnittliche Listenlänge = durchschn. Anz. Kugeln pro Urne

m Urnen, n Kugeln → durschn. #Kugeln pro Urne: $\overbrace{n/m}^{\text{load } \alpha} \in O(1)$

Balls and Bins

x
y





$\frac{3\cdot 3+2\cdot 1}{5}$

- Worst-case Laufzeit = $\Theta(\max \#\text{Kugeln pro Urne})$

  $1-1/n^c$

  mit hoher Wahrscheinlichkeit $\in O\left(n/m + \log n / \log\log n\right)$

  x

  – bei $\underbrace{n \leq m}$ also $O\left(\log n / \log\log n\right)$

- Erwartete Laufzeit (für jeden Schlüssel):
  – Schlüssel in Tabelle: entpricht der #Kugeln in der Urne einer zufälligen Kugel
  – Schlüssel nicht in Tabelle: #Kugeln einer zufälligen Urne

Erwartete Laufzeit von Find

Load α der Hashtabelle:

$$\boldsymbol{\alpha := \frac{n}{m}}$$

Kosten einer Suche:

- Suche nach einem Schlüssel x, welcher nicht in der Hashtabelle ist

  $h(x)$ ist eine uniform zufällige Position

  → erwartete Listenlänge = durchschn. Listenlänge = α

Erwartete Laufzeit:

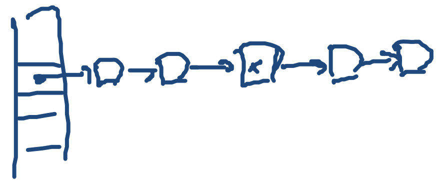
$$O(1+\alpha)$$

Erwartete Laufzeit von Find

Load α der Hashtabelle:

$1 + \ldots$

$$\boldsymbol{\alpha := \frac{n}{m}}$$



Kosten einer Suche:

- Suche nach einem Schlüssel x, welcher in der Hashtabelle ist

  Wieviele Schlüssel $y \neq x$ sind in der Liste von x? $\leq \alpha$

- Die anderen Schlüssel sind zufällig verteilt, also entspricht die erwartete Anzahl $y \neq x$ der erwarteten Länge einer zufälligen Liste in einer Hashtabelle mit $n-1$ Einträgen.

- Das sind $\frac{n-1}{m} < \frac{n}{m} = \alpha$ → Erw. Listenlänge von $x < 1 + \alpha$

Erwartete Laufzeit: $O(1 + 1 + \alpha) = O(1+\alpha)$

Laufzeiten Hashing mit Chaining

Zusammenfassung Laufzeiten:

create & insert:

- Immer Laufzeit $O(1)$ (auch im Worst Case, unabhängig von α)

find & delete:

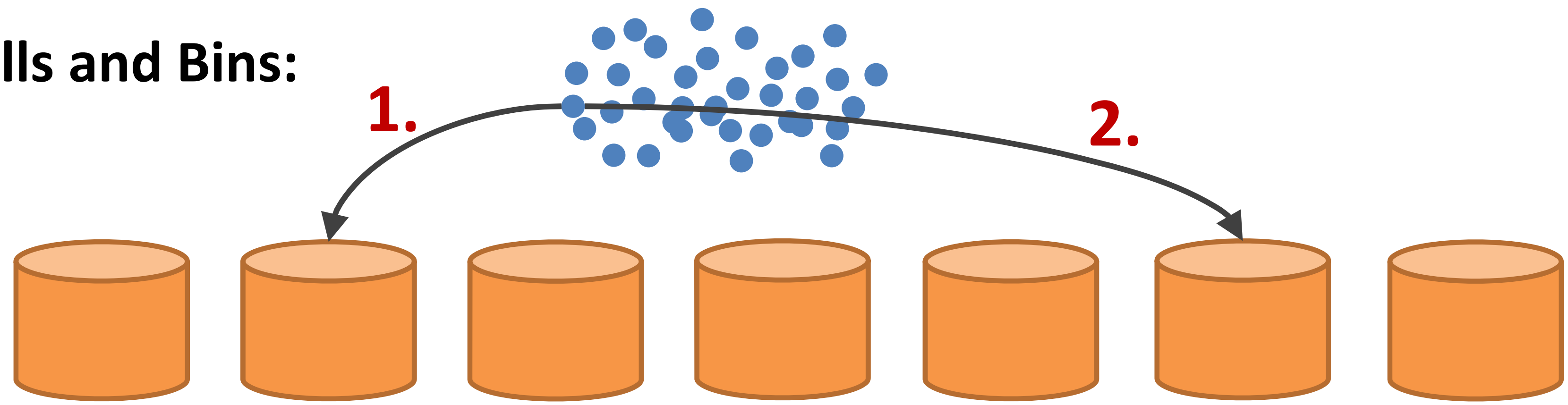
- Worst Case: $\boldsymbol{\Theta(n)}$
- Worst Case mit hoher Wahrsch. (bei zufälligem h): $\boldsymbol{O\left(\alpha + \frac{\log n}{\log\log n}\right)}$
- Erwartete Laufzeit (für bestimmten Schlüssel x): $\boldsymbol{O(1+\alpha)}$
  - gilt für erfolgreiche und nicht erfolgreiche Suchen
  - Falls $\alpha = O(1)$ (d.h., Hashtabelle hat Grösse $\Omega(n)$), dann ist das $O(1)$
- Hashtabellen sind extrem effizient und haben **typischerweise $O(1)$ Laufzeit für alle Operationen**.

Kürzere Listenlängen

Idee:

- Benutze zwei Hashfunktionen h_1 und h_2
- Füge Schlüssel x in die kürzere der beiden Listen bei $h_1(x)$ und $h_2(x)$ ein

Balls and Bins:



- Lege Kugel in Urne mit weniger Kugeln
- Bei n Kugeln, m Urnen: maximale Anz. Kugeln pro Urne (whp):

$$\boldsymbol{O(n/m + \log\log m)}$$

- Bekannt als “power of two choices”

Gute Hashfunktionen

$S \to \{0, \dots, m-1\}$

$m^{|S|}$

Wie wählt man eine gute Hashfunktion?

Was sollte eine gute Hashfunktion erfüllen?

- Im Prinzip sollte sie die gleichen Eigenschaften wie eine zufällige Funktion haben:
  - Mapping von verschiedenen Schlüsseln ist unabhängig (nicht klar, was das bei einer deterministischen Funktion genau heissen soll)
  - Mapping ist uniform zufällig (alle Hashwerte kommen gleich oft vor)
- Man kann diese Bedingungen meistens nicht überprüfen
- Falls man etwas über die Verteilung der Schlüssel weiss, kann man das allenfalls ausnützen
- Es gibt aber zum Glück einfache Heuristiken, welche in der Praxis gut funktionieren

Divisionsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

- Alle Werte zwischen 0 und $m - 1$ kommen gleich oft
  - So gut, das möglich ist

Vorteile:

- Sehr einfache Funktion
- Nur eine Division → kann man schnell berechnen
- Funktioniert oft recht gut, solange man m geschickt wählt...
  - besprechen wir gleich...

Bemerkung:

- Falls die Schlüssel keine ganzen Zahlen sind, kann man den Bitstring als ganze Zahl interpretieren

Divisionsmethode

$1010\cdots1011\underbrace{01101001}_{k}$

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

Wahl des Divisors m

- Man könnte $h(x)$ besonders schnell berechnen falls $m = \underline{2}^k$
- Das ist aber keine gute Wahl, da man dann einfach die letzten k Bits als Hashwert bekommt!
  - Der Hashwert sollte von allen Bits abhängen
- Am besten wählt man m als Primzahl
- Eine Primzahl m, so dass $\underline{m = 2^k - 1}$ ist auch keine gute Idee
  - siehe Übungsblatt 4
- Am besten: Primzahl m, welche nicht nahe bei einer 2er-Potenz ist

Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$\boldsymbol{h(x) = \lfloor m \cdot (\underbrace{Ax - \lfloor Ax \rfloor}_{\in [0,1)}) \rfloor}$$

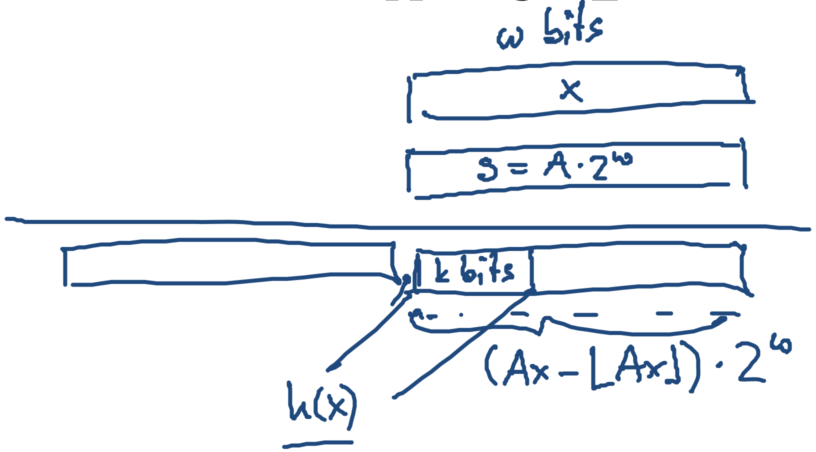
- A ist eine Konstante zwischen 0 und 1

Bemerkungen

$$A = \frac{s}{2^w}$$

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer k)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$ und

$$A = s \cdot 2^{-w}$$



Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$\boldsymbol{h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor}$$

- A ist eine Konstante zwischen 0 und 1

Bemerkungen

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer k)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$ und
$$A = s \cdot 2^{-w}$$

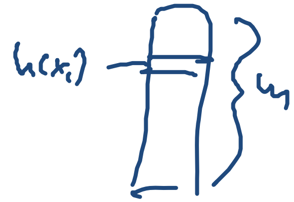
  – Grundsätzlich funktioniert jedes A, in [Knuth; The Art of Comp. Progr. Vol. 3] wird empfohlen, dass
$$A \approx \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \underline{0.6180339887} \dots$$

Zufällige Hashfunktionen

Falls h zufällig aus allen möglichen Funktionen ausgewählt wird:

$x_1 \neq x_2$

$$\forall x_1, x_2 : \Pr\big(h(x_1) = h(x_2)\big) = \frac{1}{m}$$



Problem:

- eine solche Funktion kann nicht effizient repräsentiert und ausgewertet werden
  - Im Wesentlichen braucht man eine Tabelle mit allen möglichen Schlüsseln

Idee:

- Eine Funktion zufällig aus einem kleineren Bereich wählen
  - z.B. bei Multiplikationsmethode $h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor$ einfach den Parameter A zufällig wählen
- Nicht ganz so gut, wie eine uniform zufällige Funktion, aber wenn man's richtig macht, funktioniert die Idee → universelles Hashing

Universelles Hashing I

Definition:

- Sei S die Menge der mögl. Schlüssel und m die Grösse der Hashtab.
- Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Hashfunktionen $S \to \{0, \dots, m-1\}$
- Die Menge $\mathcal{H}$ heisst c-universell, falls

Kollision $\quad = \frac{|H|}{m}$

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}$$

- Mit anderen Worten, falls man h zufällig aus $\mathcal{H}$ wählt, dann gilt

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow \Pr\big(h(x) = h(y)\big) \leq \frac{c}{m} \qquad \frac{c \frac{|H|}{m}}{|H|}$$

Universelles Hashing II $|X| = n$

Theorem:

- Sei $\mathcal{H}$ eine c-universelle Menge von Hashfkt. $S \to \{0, \dots, m-1\}$
- Sei $X \subset S$ eine beliebige Menge von Schlüsseln
- Sei $h \in \mathcal{H}$ eine zufällig gewählte Fkt. aus $\mathcal{H}$

- Für ein gegebenes $i \in \{0, \dots, m-1\}$ sei

$$X_i := \{x \in X : h(x) = i\}$$

- Im Erwartungswert hat X_i Grösse $\leq 1 + c \cdot \frac{|X|}{m}$

falls $|X| = n$

$1 + c \cdot \frac{n}{m}$

Die Analyse von vorhin lässt sich übertragen

Konsequenz:

- Im Erwartungswert sind alle Listen kurz!

Universelles Hashing III

- Gute universelle Mengen von Hashfunktionen existieren!

Beispiele:

- m beliebig, p: Primzahl mit $p > m$ und $p \geq |S|$

  $\mathcal{H}$: Menge der Fkt. $h_{a,b}(x) = (a \cdot x + b) \bmod p \bmod m$

  – wobei $a, b \in S$

  c-universell für $c \approx 1$

  $a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots a_0$

  $x_{k-1}\, x_{k-2} \ldots x_0$

- m beliebig, $k = \lceil \log_m |S| \rceil$, Parameter $a \in S$

  Basis m-Darstellung von a, x: $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot m^i$, $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \cdot m^i$

  $\mathcal{H}$: Menge der Fkt. $h_a(x) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x_i\right) \bmod m$

  1-universell

Hashing mit offener Adressierung

Ziel:

- Speichere alles direkt in der Hashtabelle (im Array)
- offene Adressierung = geschlossenes Hashing
- keine Listen

$h(x,0), h(x,1), \ldots, h(x,m-1)$

Grundidee:

- Bei Kollisionen müssen alternative Einträge zur Verfügung stehen
- Erweitere Hashfunktion zu $h(x)$ / $h(x,0), h(x,1), h(x,2), \ldots$

$$h: S \times \{0, \ldots, m-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$$

  – Für jedes $x \in S$ sollte $h(x,i)$ durch alle m Werte gehen (für versch. i)

- Zugriff (schreiben/lesen) zu Element mit Schlüssel x:
  – Versuche der Reihe nach an den Positionen

$$h(x,0), h(x,1), h(x,2), \ldots, h(x,m-1)$$

Lineares Sondieren

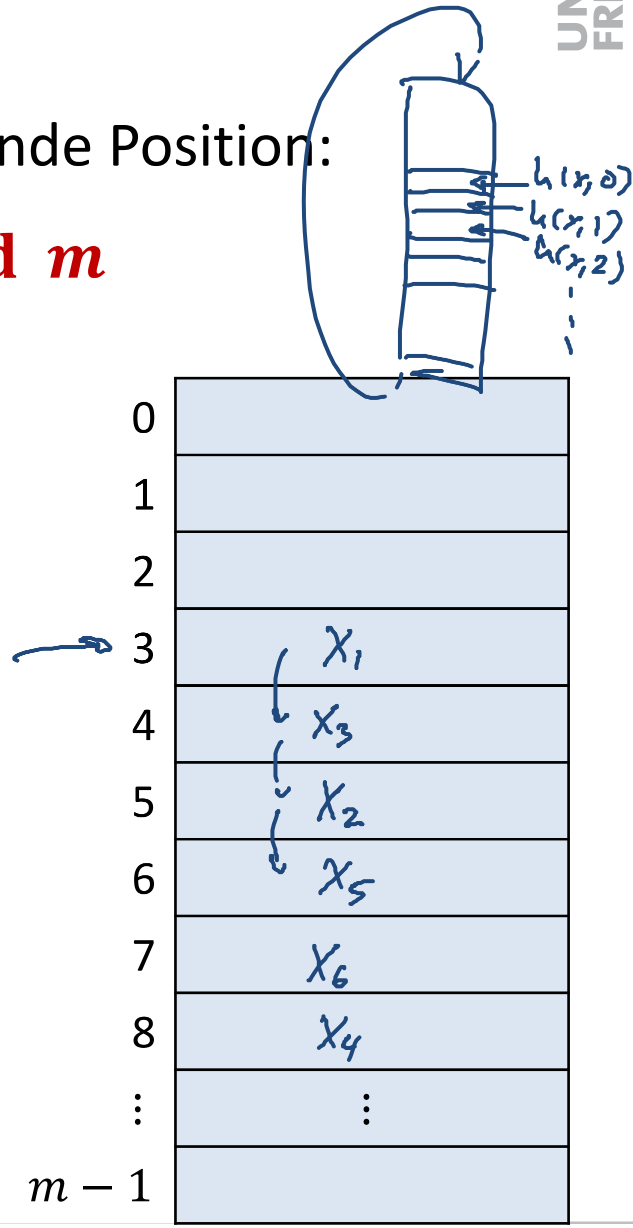
Idee:

- Falls $h(x)$ besetzt, versuche die nachfolgende Position:

$$\boldsymbol{h(x,i) = (h(x) + i) \ \mathbf{mod} \ m}$$

  für $i = 0, \dots, m-1$

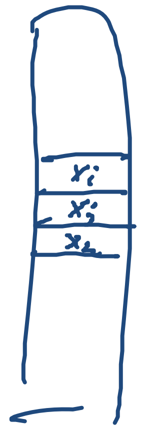
- **Beispiel:**
  Füge folgende Schlüssel ein
  - $x_1, h(x_1) = 3$
  - $x_2, h(x_2) = 5$
  - $x_3, h(x_3) = 3$
  - $x_4, h(x_4) = 8$
  - $x_5, h(x_5) = 4$
  - $x_6, h(x_6) = 6$
  - …



Lineares Sondieren

Vorteile:

- sehr einfach zu implementieren
- alle Arraypositionen werden angeschaut
- gute Cache-Lokalität



Nachteile:

- Sobald es Kollisionen gibt, bilden sich Cluster
- Cluster wachsen, wenn man in irgendeine Position des Clusters "hineinhasht"
- Cluster der Grösse k wachsen in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit $(k+1)/m$
- Je grösser die Cluster, deste schneller wachsen sie!!

Quadratisches Sondieren

Idee:

- Nehme Sequenz, welche nicht zu Cluster führt:

$$\boldsymbol{h(x,i) = \left(h(x) + c_1 i + c_2 i^2\right) \bmod m}$$

für $i = 0, \dots, m-1$ $\quad h(y) = h(x)$

Vorteil:

- ergibt keine zusammenhängenden Cluster
- deckt bei geschickter Wahl der Parameter auch alle m Positionen ab

Nachteil:

- kann immer noch zu einer Art Cluster-Bildung führen
- Problem: der erste Hashwert bestimmt die ganze Sequenz!
- Asympt. im besten Fall so gut, wie Hashing mit verketteten Listen

Doppel-Hashing

Ziel: Verwende mehr als m verschiedene Abfolgen von Positionen

$h(x,0) = h_1(x)$

Idee: Benutze zwei Hashfunktionen

$$\boldsymbol{h(x,i) = (h_1(x) + i \cdot h_2(x)) \bmod m}$$

$h_1(y) = h_1(x)$

Vorteile:

- Sondierungsfunktion hängt in zwei Arten von x ab
- Vermeidet die Nachteile von linearem und quadr. Sondieren
- Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schlüssel x und x' die gleiche Positionsfolge erzeugen:

$$h_1(x) = h_1(x') \wedge h_2(x) = h_2(x') \implies \text{WSK} = \frac{1}{m^2}$$

- Funktioniert in der Praxis sehr gut!

Offene Adressierung : Zusammenfassung

Offene Adressierung:

- Alle Schlüssel/Werte werden direkt im Array gespeichert
- Keine Listen nötig
  - spart den dazugehörigen Overhead…
- Nur schnell, solange der Load

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

$\alpha \leq 1$

$\alpha \leq \frac{3}{4}$

  nicht zu gross wird…
  - dann ist's dafür besser als Chaining…
- $\alpha > 1$ ist nicht möglich!
  - da nur m Positionen zur Verfügung stehen