Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 9 (28.5.2014)

Hashtabellen III

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

UNI FREIBURG

Offene Adressierung : Zusammenfassung

Offene Adressierung:

- Alle Schlüssel/Werte werden direkt im Array gespeichert
- Keine Listen nötig
  - spart den dazugehörigen Overhead…
- Nur schnell, solange der Load

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

  nicht zu gross wird…
  - dann ist's dafür besser als Chaining…
- $\alpha > 1$ ist nicht möglich!
  - da nur m Positionen zur Verfügung stehen

Rehash

Was tun, wenn die Hashtabelle zu voll wird?

- Offene Adressierung: $\alpha > 1$ nicht möglich, bei $\alpha \to 1$ sehr ineff.
- Chaining: Komplexität wächst linear mit α

Was tun, wenn die gewählte Hashfunktion schlecht ist?

Rehash:

- Erstelle neue, grössere Hashtabelle, wähle neue Hashfunktion h'
- Füge alle Schlüssel/Werte neu ein

Beispiel: $X = \{5, 10, 11, 22\}$, $h(x) = x \bmod 4$, $h'(x) = 3x - 1 \bmod 8$

Kosten Rehash

Ein Rehash ist teuer!

Kosten (Zeit):

- $\Theta(m+n)$: linear in der Anzahl eingefügten Elemente und der Länge der alten Hashtabelle
  - typischerweise ist das einfach $\Theta(n)$
- Wenn man es richtig macht, ist ein Rehash selten nötig.
- **richtig heisst:**
  - gute Hashfunktion (z.B. aus einer universellen Klasse)
  - gute Wahl der Tabellengrössen:

    bei jedem **Rehash** sollte die **Tabellengrösse** etwa **verdoppelt** werden

    alte Grösse $m \implies$ neue Grösse $\approx 2m$
  - Verdoppeln ergibt immer noch durchschnittlich konstante Zeit pro Hashtabellen-Operation

    → amortisierte Analyse (gleich mehr dazu…)

Kosten Rehash

Analyse Verdoppelungsstrategie

- Wir machen ein paar vereinfachende Annahmen:
  - Bis zu Load α_0 (z.B. $\alpha_0 = {}^1/_2$) kosten alle Hashtabellen-Operationen $\leq c$
  - Bei Load α_0 wird die Tabellengrösse verdoppelt:
    Alte Grösse m, neue Grösse $2m$, Kosten $\leq c \cdot m$
  - Am Anfang hat die Tabelle Grösse $m_0 \in O(1)$
  - Die Tabelle wird nie verkleinert…

- Wie gross sind die Kosten für das Rehashing, verglichen mit den Gesamtkosten für alle anderen Operationen?

Kosten Rehash

Gesamtkosten

- Wir nehmen an, dass die Tabellengrösse $m = m_0 \cdot 2^k$ für $k \geq 1$ ist
  - d.h., bis jetzt haben wir $k \geq 1$ Rehash-Schritte gemacht
  - Bemerkung: Bei $k = 0$ sind die Rehash-Kosten 0.
- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot \left(2^k - 1\right) \leq c \cdot m$$

- Gesamt-Kosten für die übrigen Operationen
  - Beim Rehash von Grösse ${}^{m}/_{2}$ auf m waren $\geq {}^{\alpha_0}/_{2} \cdot m$ Einträge in der Tabelle
  - Anzahl Hashtabellen-Operationen (ohne Rehash)

$$\geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

Kosten Rehash

- Die Gesamt-Rehash-Kosten sind dann

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} c \cdot m_0 \cdot 2^i = c \cdot m_0 \cdot (2^k - 1) \leq c \cdot m$$

- Anzahl Hashtabellen-Operationen

$$\#\mathrm{OP} \geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot m$$

- Durchschnittskosten pro Operation

$$\frac{\#\mathbf{OP} \cdot \boldsymbol{c} + \mathbf{Rehash\_Kosten}}{\#\mathbf{OP}} \leq \boldsymbol{c} + \frac{2\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\alpha_0}} \in \boldsymbol{O}(\mathbf{1})$$

- Im Durschnitt sind die Kosten pro Operation Konstant
  - auch für worst-case Eingaben (solange die Annahmen zutreffen)
  - **Durchschnittskosten pro Operation = amortisierte Kosten der Operation**

Amortisierte Analyse

Algorithmenanalyse bisher:

- worst case, best case, average case

Jetzt zusätzlich **amortized worst case**:

- n Operationen $o_1, \dots, o_n$ auf einer Datenstruktur, t_i: Kosten von o_i
- Kosten können sehr unterschiedlich sein (z.B. $t_i \in [1, c \cdot i]$)
- Amortisierte Kosten pro Operation

$$\frac{T}{n}, \qquad \text{wobei } T = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

- **Amortisierte Kosten:** Durchschnittskosten pro Operation bei einer worst-case Ausführung
  - amortized worst case $\neq$ average case!!

- Mehr dazu in der Algorithmentheorie-Vorlesung (und evtl. später)

Amortisierte Analyse Rehash

- Falls man immer nur vergrössert und davon ausgeht, dass bei kleinem Load, Hashtabellenop. $O(1)$ Kosten haben, sind die amortisierten Kosten pro Operation $O(1)$.

- Analyse funktioniert auch bei zufälliger Hashfunktion aus universeller Familie (mit hoher Wahrscheinlichkeit)
  - dann haben Hashtabellen-Op. bei kleinem Load mit hoher Wahrscheinlichkeit amortisierte Kosten $O(1)$

- Die Analyse lässt sich auch auf Rehashs zum Verkleinern erweitern

- In einer ähnlichen Art kann man aus fixed-size Arrays dynamische Arrays bauen
  - Alle Arrayoperationen haben dann $O(1)$ amortisierte Laufzeit
  - Vergrössern/verkleinern erlaubt der ADT nur in 1-Elem.-Schritten am Ende!
  - Werden wir vielleicht noch genauer anschauen...

Cuckoo Hashing Idee

Hashing Zusammenfassung:

- effiziente Dictionary-Datenstruktur
- Operationen brauchen im Erwartungswert (meistens) $O(1)$ Zeit
- Bei Hashing mit Chaining hat insert immer $O(1)$ Laufzeit
- Können wir auch bei **find $\boldsymbol{O(1)}$ Laufzeit** garantieren?
  - wenn gleichzeitig insert nur noch im Erwartungswert $O(1)$ ist…

Cuckoo Hashing Idee:

- Offene Adressierung
  - an jeder Position der Tabelle hat es nur für ein Element Platz
- Zwei Hashfunktionen h_1 und h_2
- Ein Schlüssel x wird immer bei $h_1(x)$ oder $h_2(x)$ gespeichert
  - Falls beim Einfügen beide Stellen schon besetzt sind, müssen wir umorganisieren…

Cuckoo Hashing

Enfügen eines Schlüssels x:

- x wird immer an der Stelle $h_1(x)$ eingefügt
- Falls schon ein anderer Schlüssel y an der Stelle $h_1(x)$ ist:
  - Werfe y da raus (daher der Name: Cuckoo Hashing)
  - y muss an seiner alternativen Stelle eingefügt werden (falls es bei $h_1(y)$ war, an Stelle $h_2(y)$, sonst an Stelle $h_1(y)$)
  - falls da auch schon ein Element z ist, werfe z raus und platziere es an seiner Alternativposition
  - und so weiter…

Find / Delete:

- Falls x in der Tabelle ist, ist's an Stelle $h_1(x)$ oder $h_2(x)$
- bei Delete: Markiere Zelle als leer!
- beide Operationen immer $O(1)$ Zeit!

Cuckoo Hashing Beispiel

Tabellengrösse $m = 5$

Hashfunktionen $h_1(x) = x \bmod 5,\ h_2(x) = 2x - 1 \bmod 5$

Füge Schlüssel 17, 28, 7, 10, 20 ein:

Cuckoo Hashing : Zyklen

- Beim Einfügen kann es zu einem Zyklus kommen
  - x wirft $y_1$raus
  - y_1 wirft y_2 raus
  - y_2 wirft y_3 raus
  - …
  - $y_{\ell-1}$ wirft y_ℓ raus
  - y_ℓ wirft x raus
- Dann wird noch der alternative Platz für x ausprobiert, aber da kann das Gleiche auch wieder passieren…
- Tritt insbesondere auf, falls $h_1(y_i) = h_2(y_i)$
- In dem Fall wählt man neue Hash-Funktionen und macht einen Rehash (normalerweise mit grösserer Tabelle)

Cuckoo Hashing : Hashfunktionen

Wie wählt man die zwei Hashfunktionen?

- Sie sollten möglichst "unabhängig" sein…
- Wenige Schlüssel x, für welche $h_1(x) = h_2(x)$
- Eine gute Möglichkeit:

  Zwei unabhängige, zufällige Funktionen einer universellen Menge

- Dann kann man zeigen, dass Zyklen nur sehr selten vorkommen, solange $n \leq m/2$

- Sobald die Tabelle halbvoll ist ($n \geq m/2$) sollte man daher einen Rehash machen und zu einer doppelt so grossen Tabelle wechseln

Cuckoo Hashing : Laufzeit

Find / Delete:

- Hat immer Laufzeit $O(1)$
- Man muss nur die zwei Stellen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ anschauen
- Das ist der grosse Vorteil von Cuckoo Hashing

Insert:

- Man kann zeigen, dass das im Durchschnitt auch Zeit $O(1)$ braucht
- Falls man die Tabelle nicht mehr als zur Hälfte füllt
- Verdoppeln der Tabellengrösse bei Rehash ergibt konstante durchschnittliche Laufzeit für alle Operationen!

Hashing in Python

- Wir werden bei der aktuellen Übung versuchsweise auch Python erlauben

Hashtabellen (Dictionary):

https://docs.python.org/2/library/stdtypes.html#mapping-types-dict

- neue Tabelle generieren: *table* = {}
- (*key*,*value*)-Paar einfügen: *table*.update({*key* : *value*})
- Suchen nach *key*: *key* in *table*
  table.get(*key*)
  table.get(*key*, *default_value*)
- Löschen von *key*: del *table*[*key*]
  table.pop(*key*, *default_value*)

Hashing in Java

Java-Klasse HashMap:

- Neue Hashtab. erzeugen (Schlüssel vom Typ *K,* Werte vom Typ *V*)

  HashMap<*K*,*V*> *table* = new HashMap<*K*,*V*>();

- Einfügen von (*key*,*value*)-Paar (*key* vom Typ *K*, *value* vom Typ *V*)

  *table.*put(*key*, *value*)

- Suchen nach *key*

  table.get(*key*)
  *table.*containsKey(*key*)

- Löschen von *key*

  table.remove(*key*)

- Ähnliche Klasse HashSet: verwaltet nur Menge von Schlüsseln

Hashing in C++

Es gibt nicht eine Standard-Klasse

hash_map:

- Sollte bei fast allen C++-Compilern vorhanden sein

http://www.sgi.com/tech/stl/hash_map.html

unordered_map:

- Seit C++11 in Standard STL

http://www.cplusplus.com/reference/unordered_map/unordered_map/

Hashing in C++

C++-Klassen hash_map / unordered_ map:

- Neue Hashtab. erzeugen (Schlüssel vom Typ *K,* Werte vom Typ *V*)

  unordered_map<*K*,*V*> *table;*

- Einfügen von (*key*,*value*)-Paar (*key* vom Typ *K*, *value* vom Typ *V*)

  table.insert(*key*, *value*)

- Suchen nach *key*

  table[*key*] oder *table*.at(*key*)
  table.count(*key*) > 0

- Löschen von *key*

  table.erase(*key*)

Hashing in C++

Achtung

- Man kann eine hash_map / unordered_map in C++ wie ein Array benutzen
  - *die Array-Elemente sind die Schlüssel*

- Aber:

  T[*key*] fügt den Schlüssel *key* ein, falls er noch nicht drin ist

  T.at(*key*) wirft eine Exception falls *key* nicht in der Map ist

Verteilte Hashtabellen

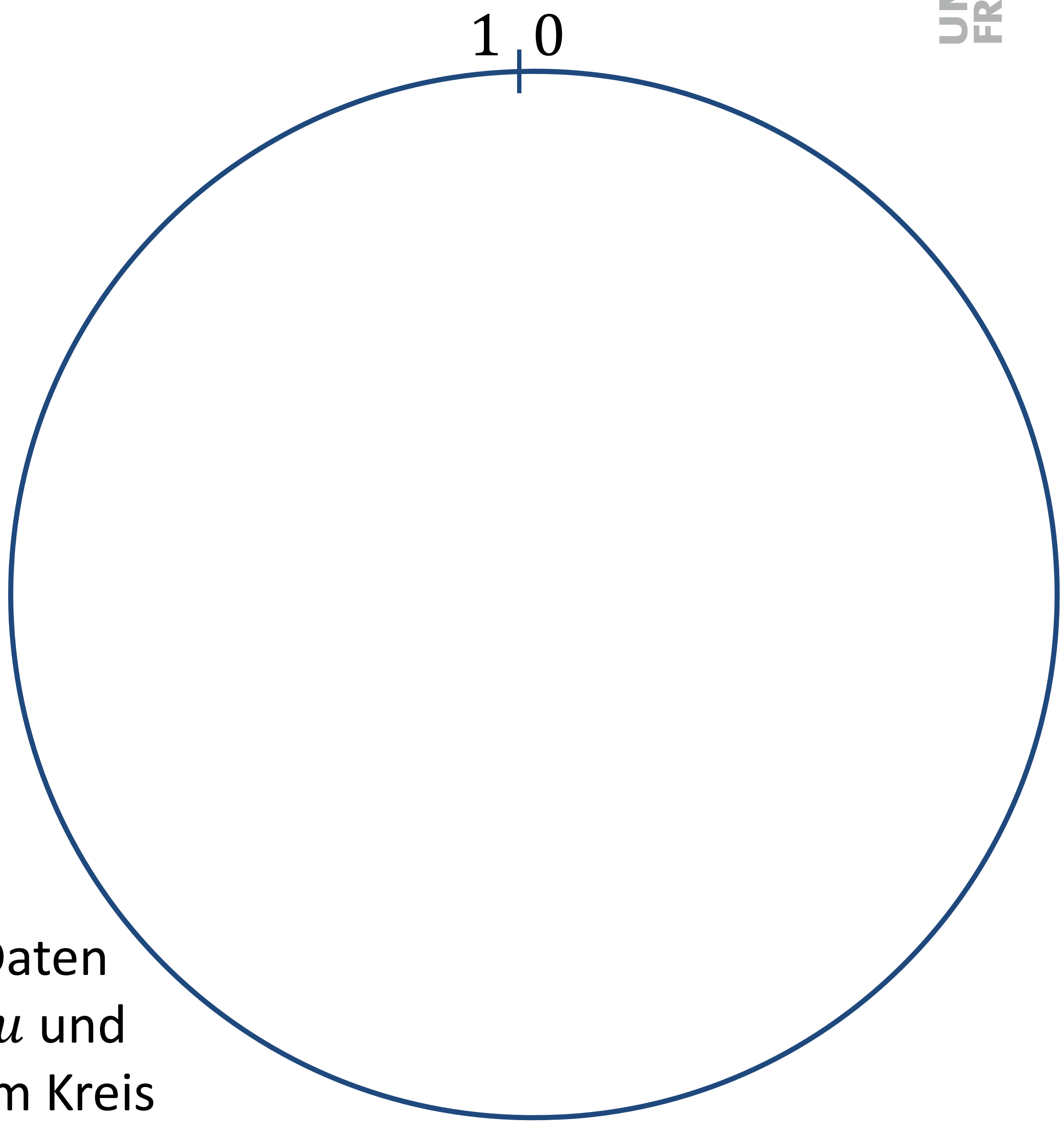
Ziel: Ein verteilter Dictionary

- Verwalte (*key*, *value*)-Paare in einem Netzwerk
  - z.B. auf vielen Rechnern im Internet
- Jeder Rechner soll einen Teil der Daten speichern
- Daten sollen schnell zugreifbar sein (übl. Dictionary-Operationen)
- Da die Anzahl Rechner gross sein kann, soll jeder Rechner im Netzwerk nur wenige andere "kennen" müssen…
  - Eine Tabelle mit allen Rechnern ist nicht machbar
  - Einen zentralen Server mit allen Informationen wollen wir auch nicht…
- Typische Anwendung: Peer-to-peer Netzwerke
  - muss nicht für illegales File Sharing sein ;-)
- Wir schauen uns eine von vielen ähnlichen Lösungen an…
  - im Wesentlichen Chord…

Verteilte Speicherung der Daten

Hashfunktion:

- $h: S \rightarrow [0, 1]$
  - verstehe Intervall $[0,1]$ als Einheitskreis
- Jeder Schlüssel wird auf den Einheitskreis gemappt
- Jeder Knoten u wählt einen zufälligen Wert $\ell_u \in [0, 1]$ (einen zufälligen Pkt. auf dem Einheitskreis)
- Ein Knoten u speichert die Daten zu den Schlüsseln zwischen u und seinem Nachfolger v auf dem Kreis

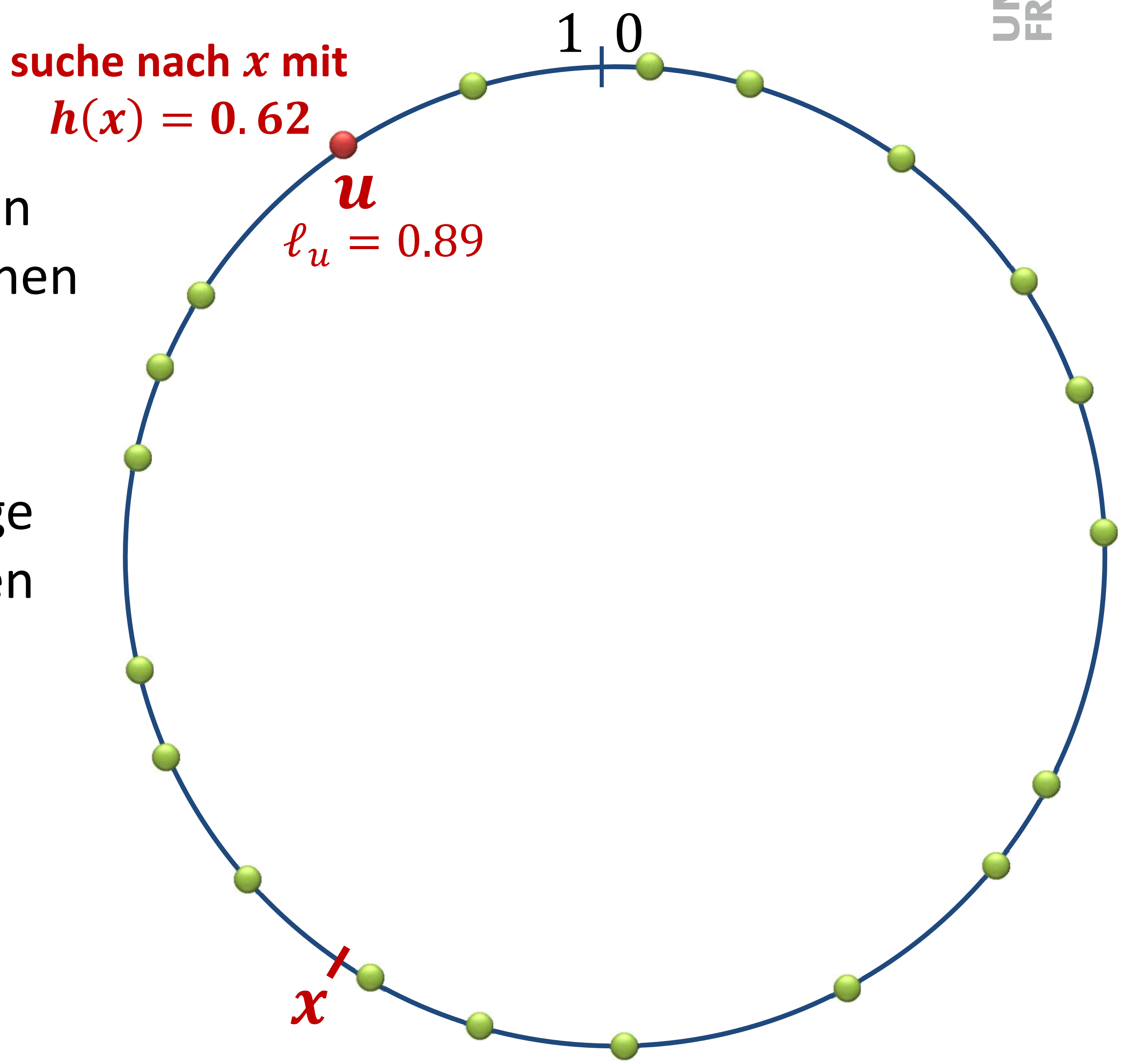


Suchen nach einem Schlüssel

Idee:

- Suche einfach, falls u eine Tabelle mit den Adressen und Bereichen von allen Knoten

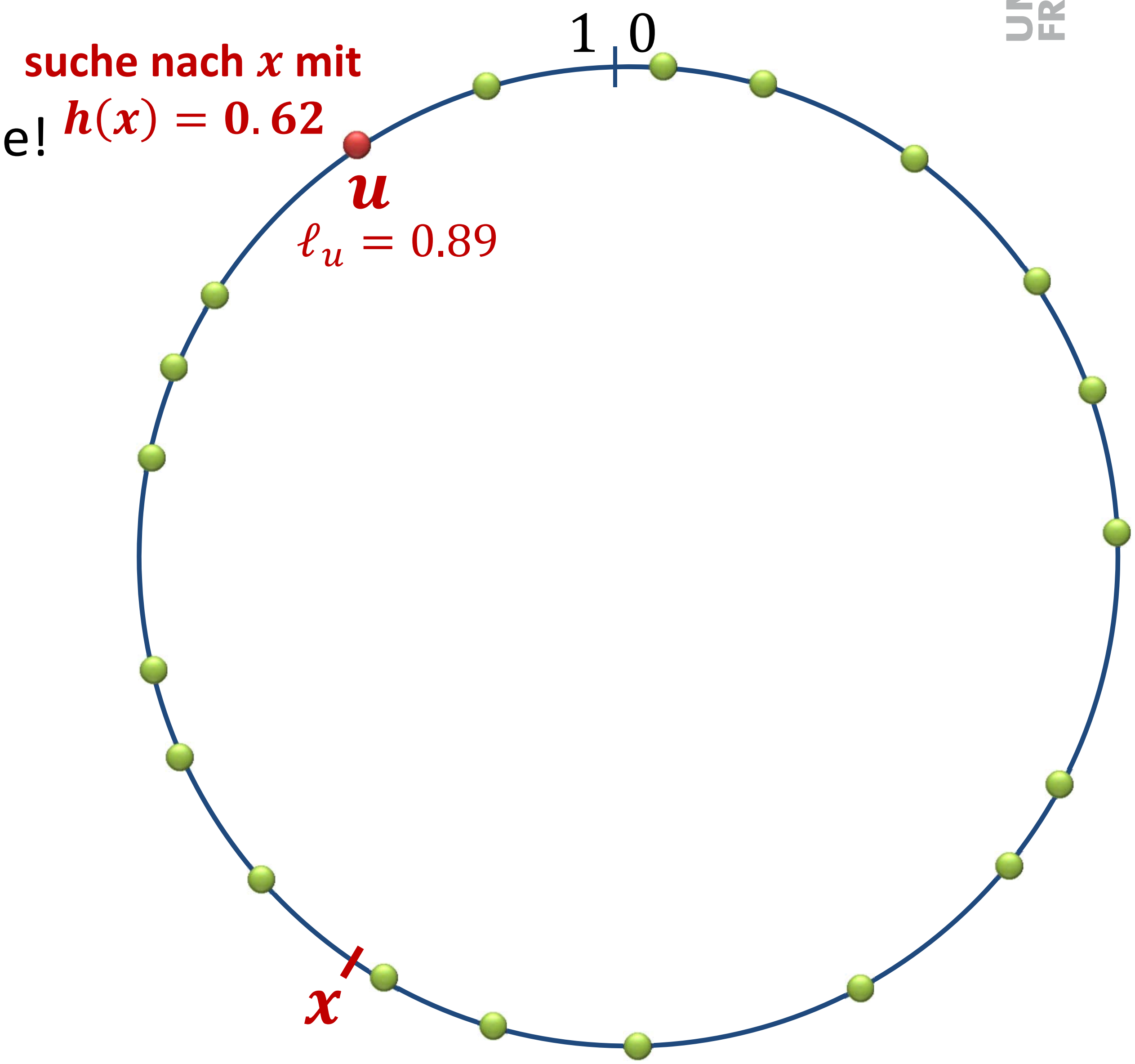
- u will aber nur wenige Adressen von anderen Knoten verwalten



Suchen nach einem Schlüssel

Idee:

- benutze binäre Suche!



Topologie

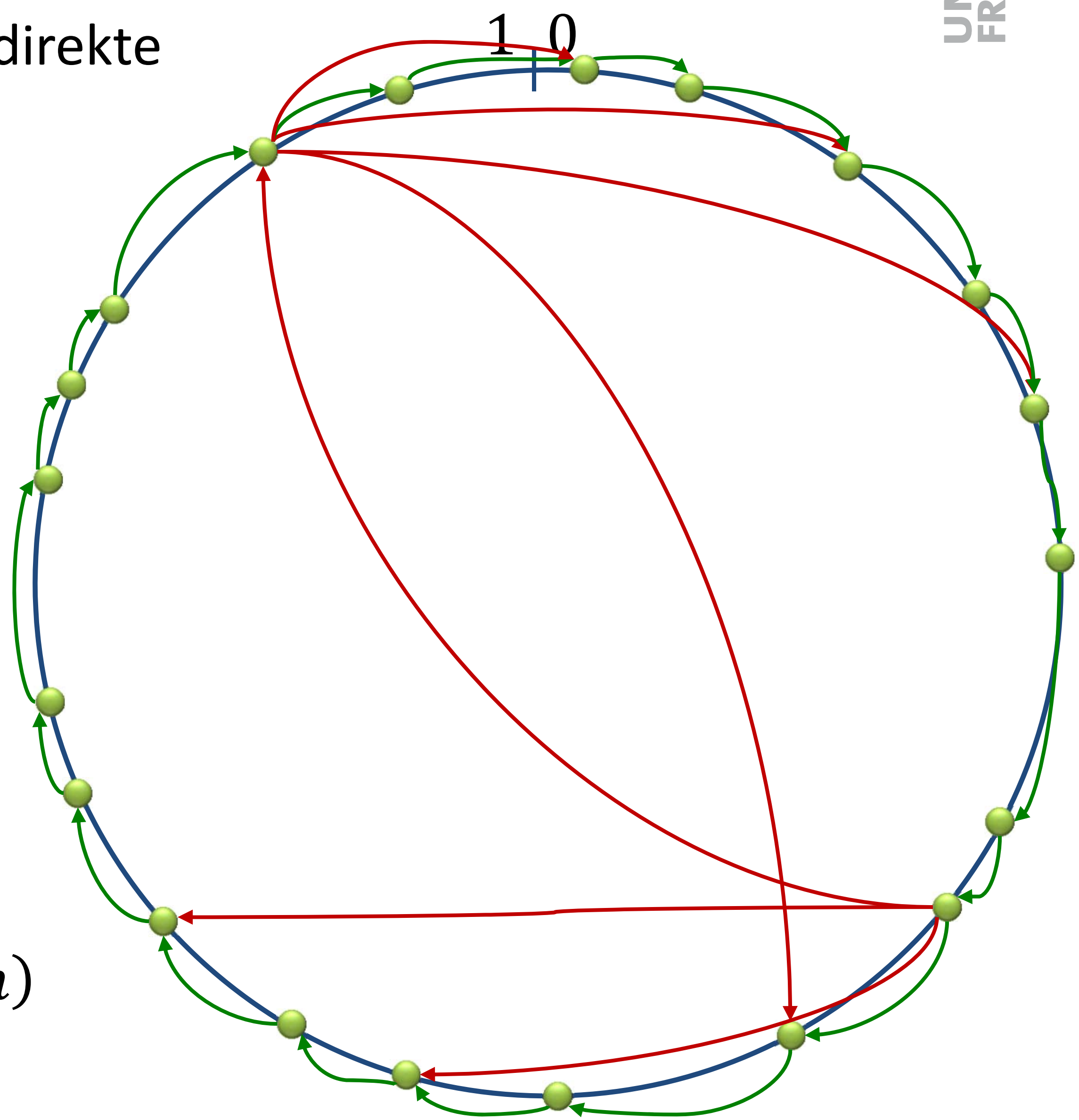
- Jeder Knoten u hat eine direkte Verbindung zu den direkten Nachfolgern

- Und zu den Nachfolger-Knoten der Werte

  $$\ell_u + 2^{-i}$$

  $(i = 1, \ldots, \log n)$
  - n: Anz. Knoten

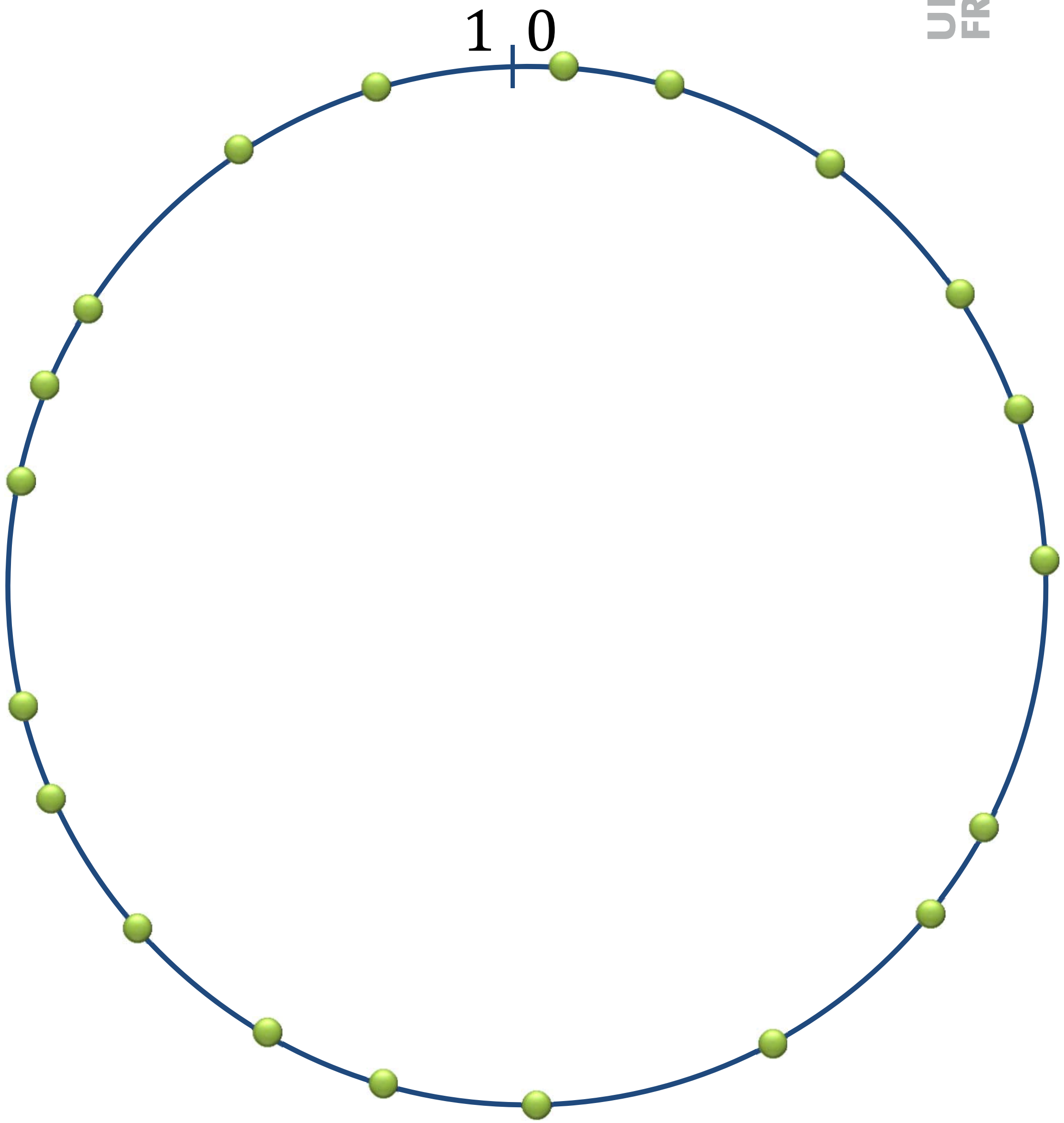
- Jeder Knoten hat direkte Verbindungen zu $O(\log n)$ anderen Knoten



Suchzeit

Man kann in dem Netzwerk in $O(\log n)$ Zeit suchen:

- Zeit = #besuchte Knoten
- Man kann in jedem Schritt im Wesentlichen in die Mitte zwischen der aktuellen Position und dem Schlüssel x springen!



Zusammenfassung: Verteilte Hashtabelle

- Man geht davon aus, dass prinzipiell jeder mit jedem kommunizieren kann
  – Ist im Internet der Fall, IP-Adresse genügt, um Nachricht zu schicken

- Der durch die direkten Verbindungen induzierte Graph heisst auch Overlay Netzwerk

- Im Overlay Netzwerk hat jeder $O(\log n)$ Nachbarn

- Man kann den Algorithmus so implementieren, dass alle wichtigen Operationen $O(\log n)$ Laufzeit haben
  – Einfügen / löschen / suchen eines Schlüssels
    (Operation wird jeweils von irgend einem Knoten ausgeführt)
  – Einfügen / löschen eines Knotens

Zusätzliche Dictionary Operationen

Dictionary:

Zusätzliche mögliche Operationen:

- *D.minimum()* : gibt kleinsten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.maximum()* : gibt grössten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.successor(key)* : gibt nächstgrösseren *key* zurück
- *D.predecessor(key)* : gibt nächstkleineren *key* zurück
- *D.getRange(k1, k2)* : gibt alle Einträge mit Schlüsseln im Intervall *[k1,k2]* zurück