Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 10 (3.6.2014)

Binäre Suchbäume I

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Zusätzliche Dictionary Operationen

UNI FREIBURG

Dictionary:

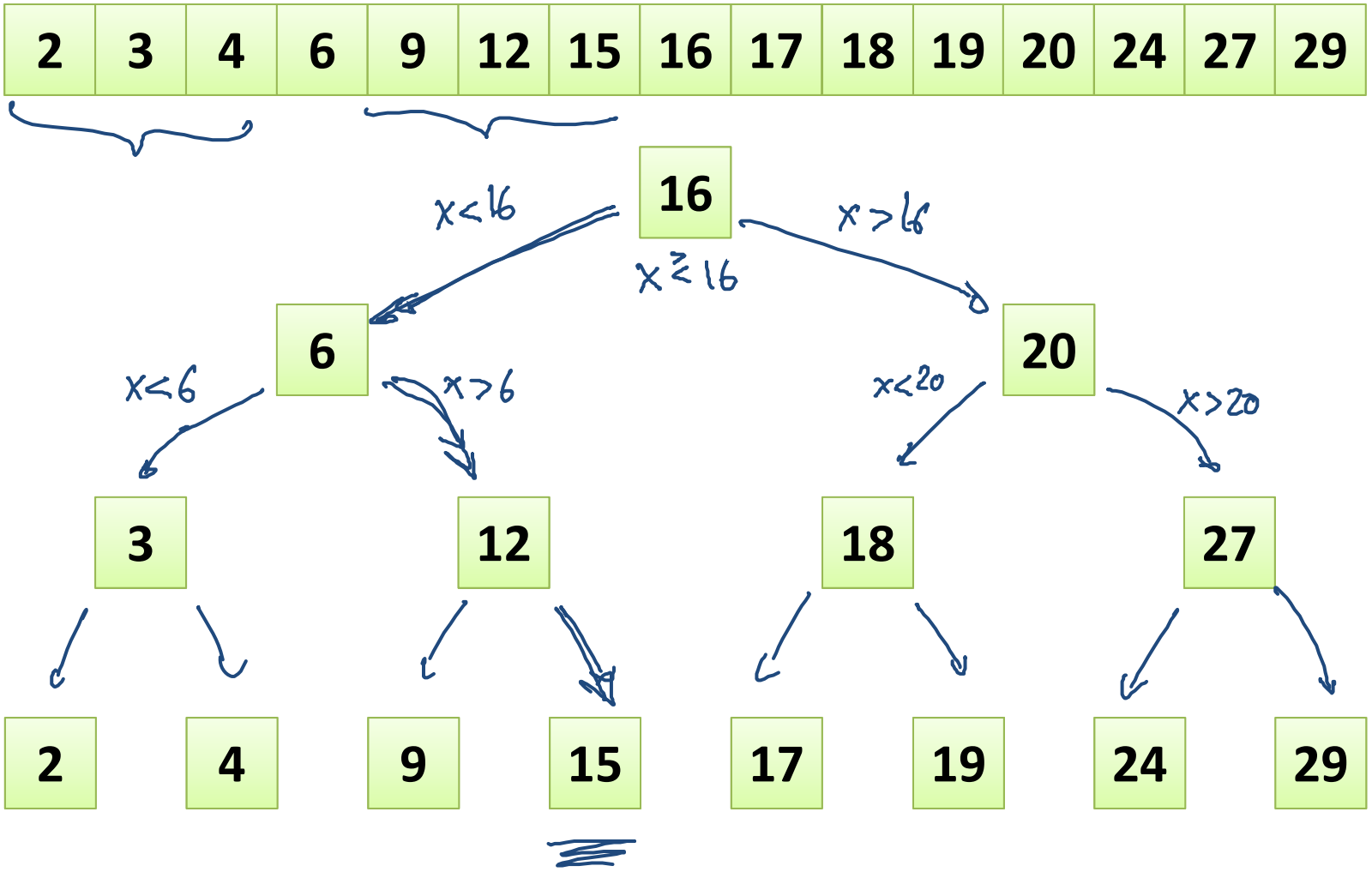
Zusätzliche mögliche Operationen:

- *D.minimum()* : gibt kleinsten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.maximum()* : gibt grössten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.successor(key)* : gibt nächstgrösseren *key* zurück
- *D.predecessor(key)* : gibt nächstkleineren *key* zurück
- *D.getRange(k1, k2)* : gibt alle Einträge mit Schlüsseln im Intervall *[k1,k2]* zurück

- Lassen sich mit Hashtabellen nicht effizient implementieren!

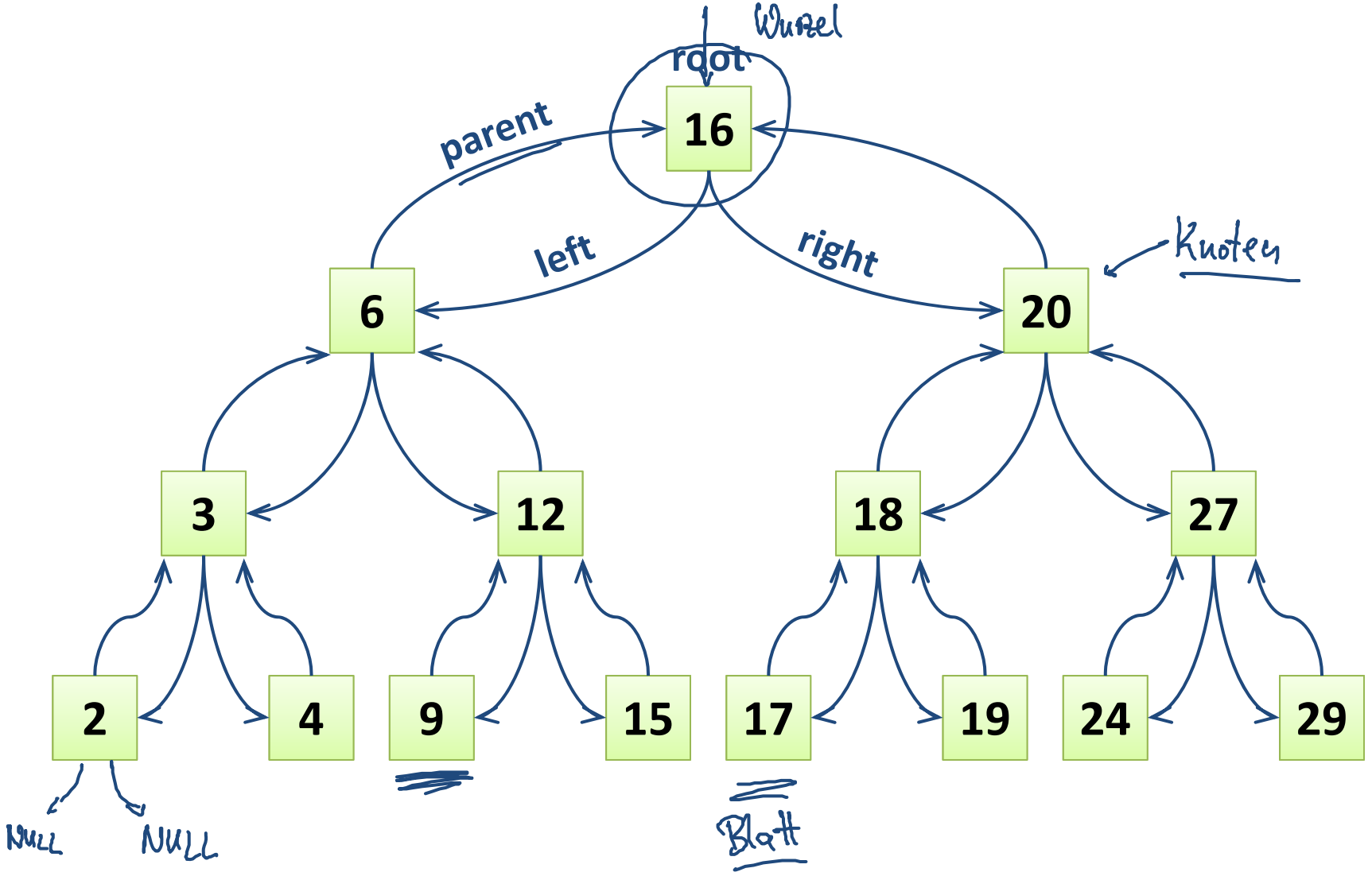
Binäre Suche Revisited…

- Binäre Suche nach x in einem sortierten Array…



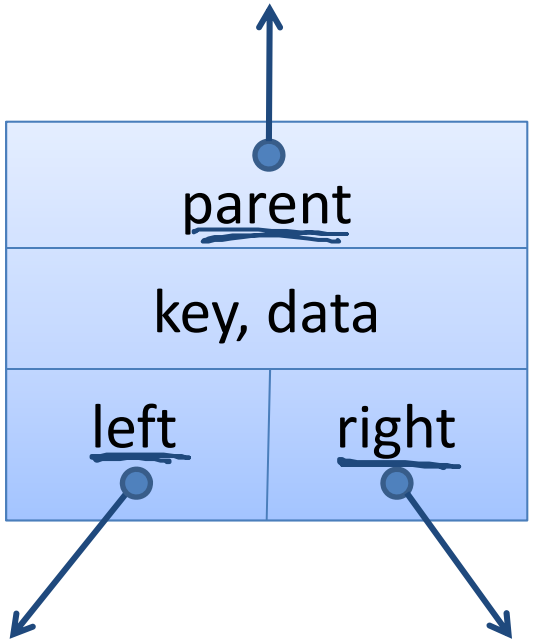
Binäre Suchbäume

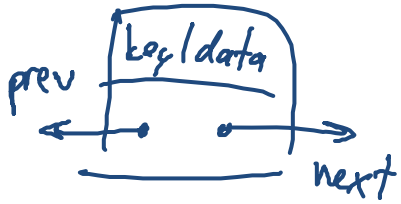
- Benutze den Suchbaum der binären Suche als Datenstruktur



Binärer Suchbaum : Elemente

TreeElement:

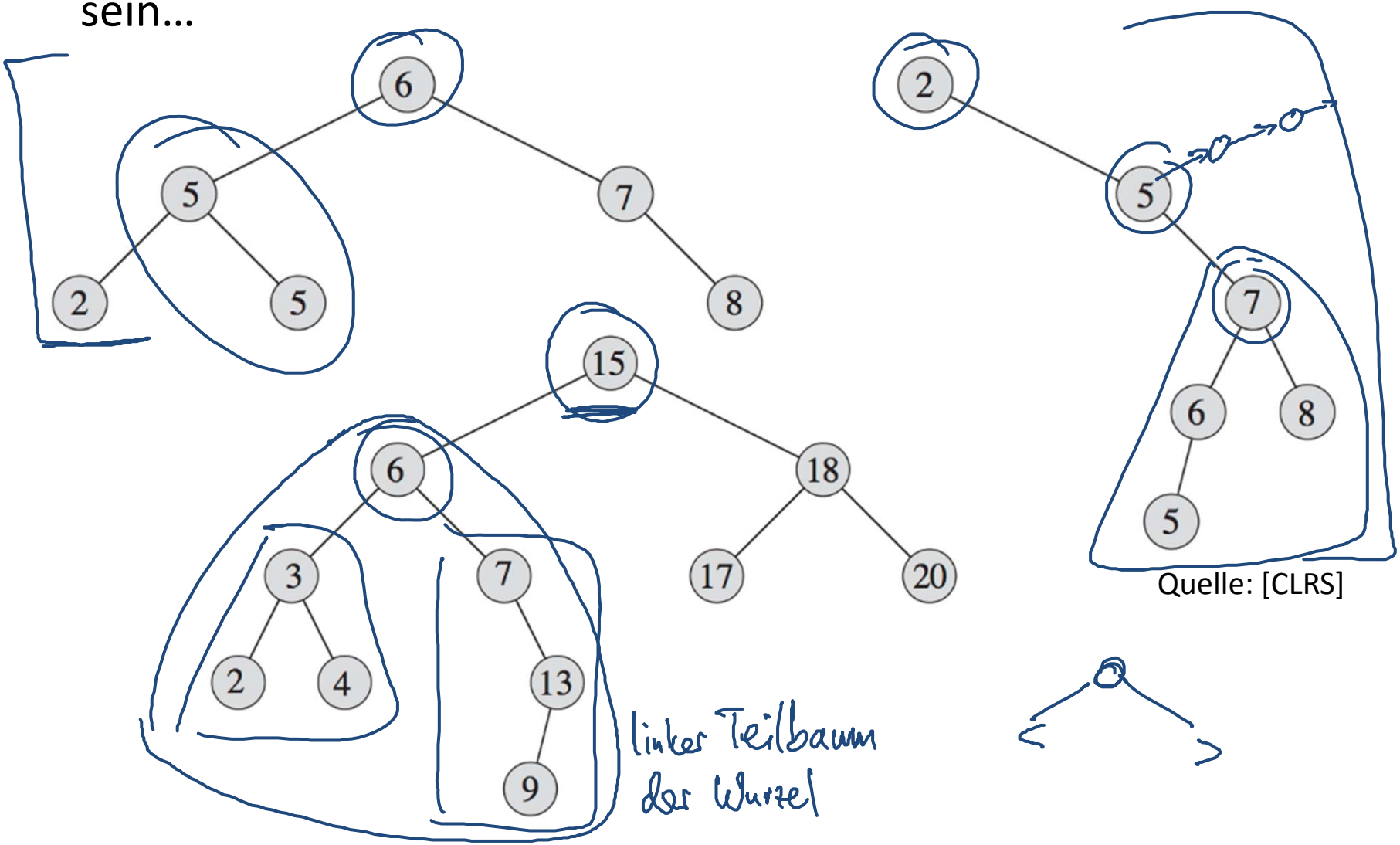




Implementierung: gleich wie bei den Listen-Elementen

Binäre Suchbäume

- Binäre Suchbäume müssen nicht immer so schön symmetrisch sein…

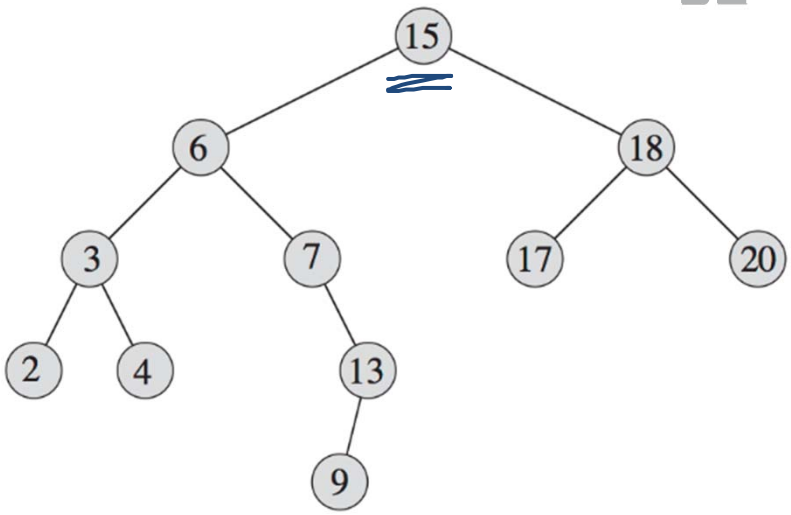


Quelle: [CLRS]

Suche in einem binären Suchbaum

Suche nach Schlüssel x

- Benutze binäre Suche
  (darum heisst's binärer Suchbaum…)



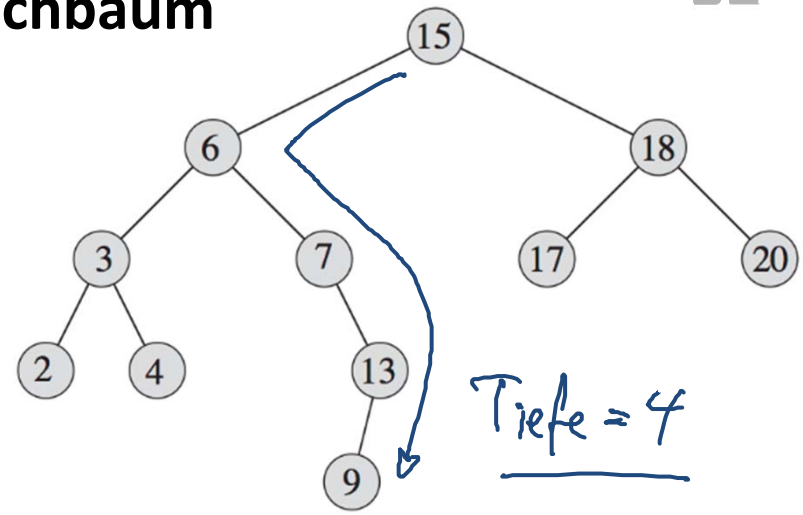

```
current = root
while current != null and current.key != x do
    if current.key > x then
        current = current.left
    else
        current = current.right
```

current == null : x ist nicht im Baum

current.key = x

Suche in einem binären Suchbaum

Laufzeit der Suche in einem binären Suchbaum



O(Tiefe des Baums)

max. Dist. root → Blatt

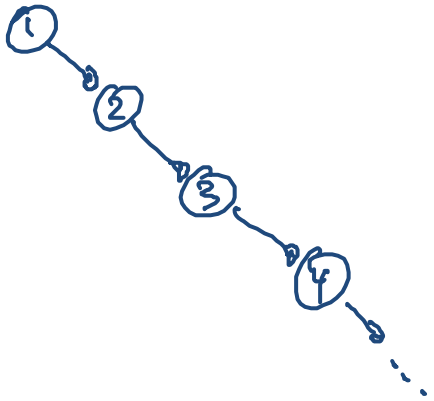
Best Case:

→ "balancierter" Baum

Tiefe $\in O(\log n)$

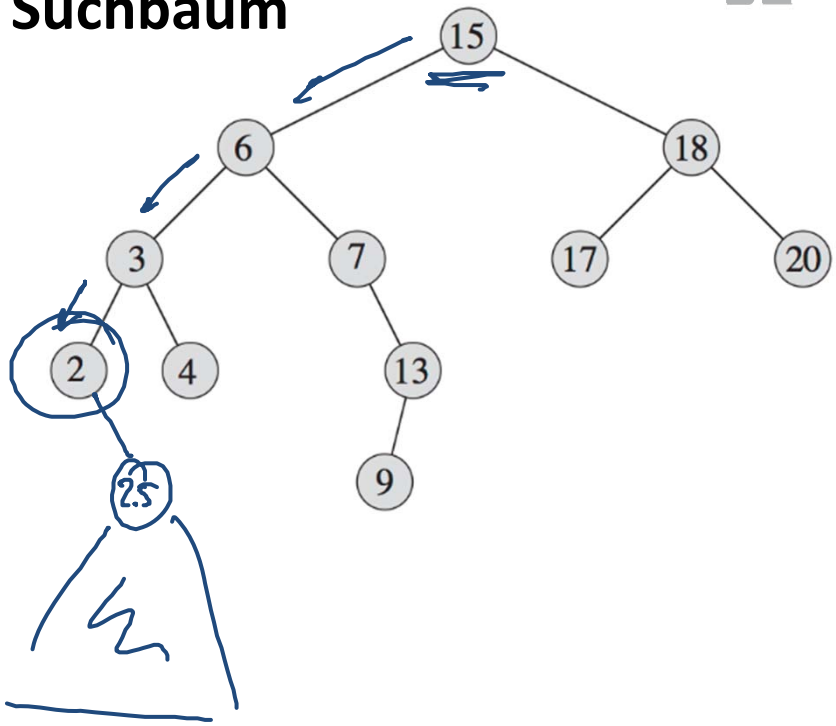
Worst Case:

Tiefe $= n-1$



Suche Minimum / Maximum

Finde kleinstes Element in einem bin. Suchbaum

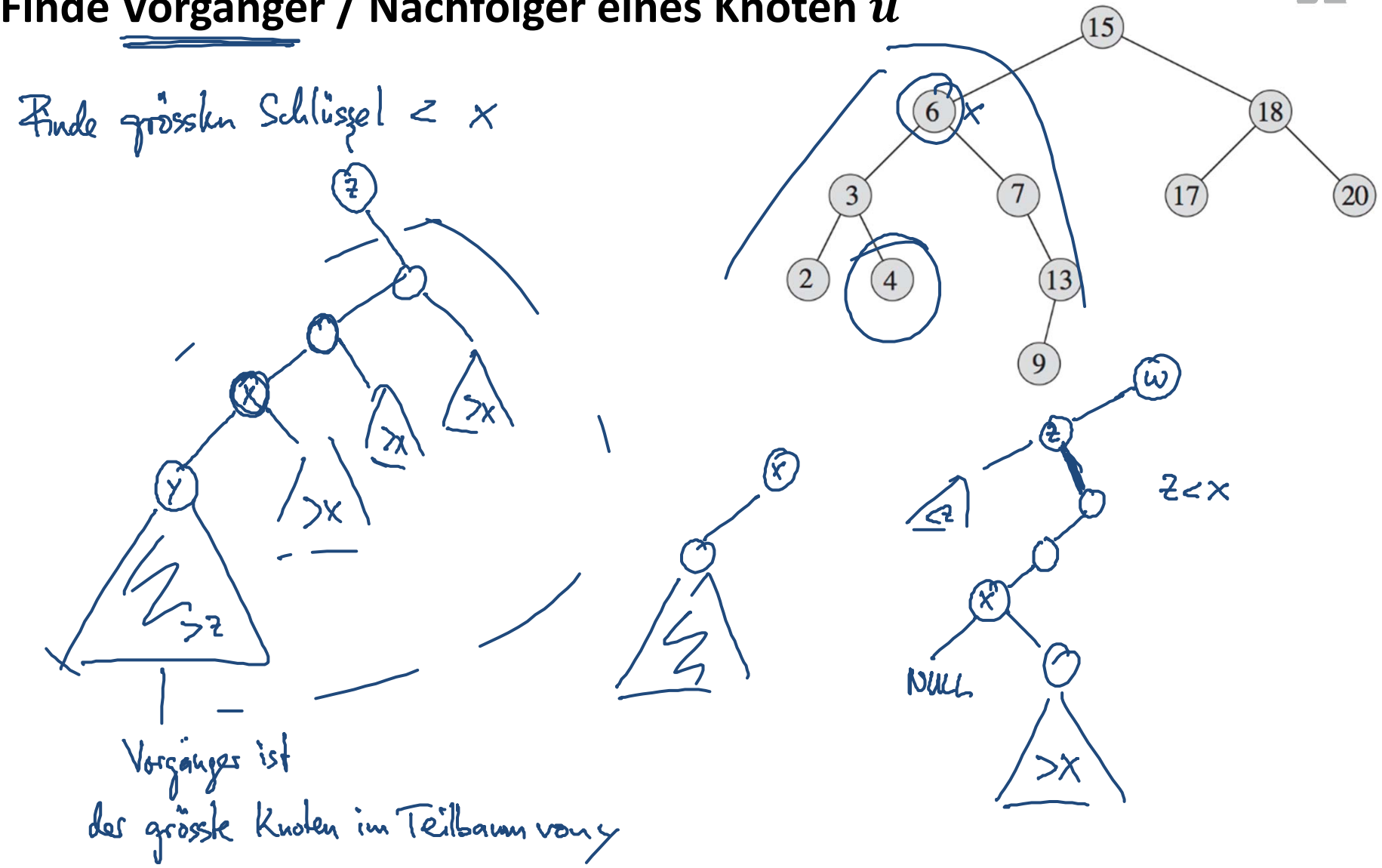



```
current = root
while (current.left != null) do
    current = current.left
```

Laufzeit: $O(\text{Tiefe})$

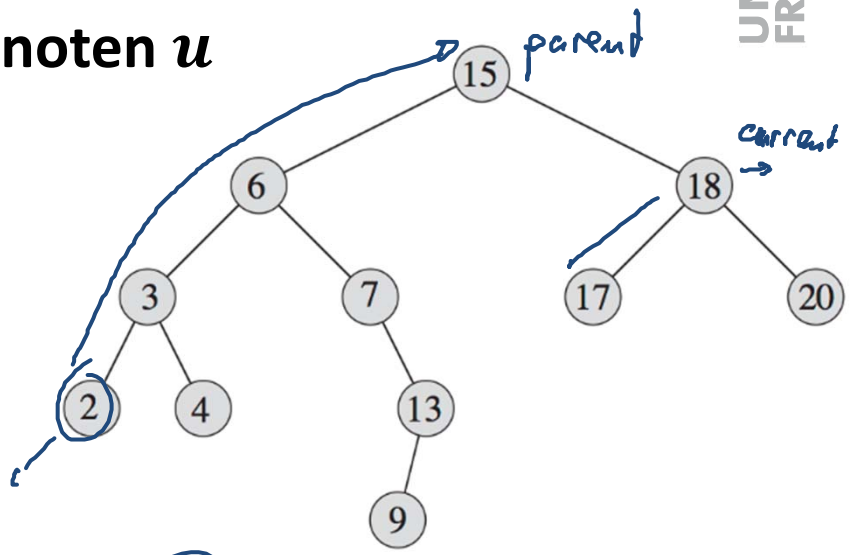
Suche Vorgänger / Nachfolger

Finde Vorgänger / Nachfolger eines Knoten u



Suche Vorgänger / Nachfolger

Finde Vorgänger / Nachfolger eines Knoten u



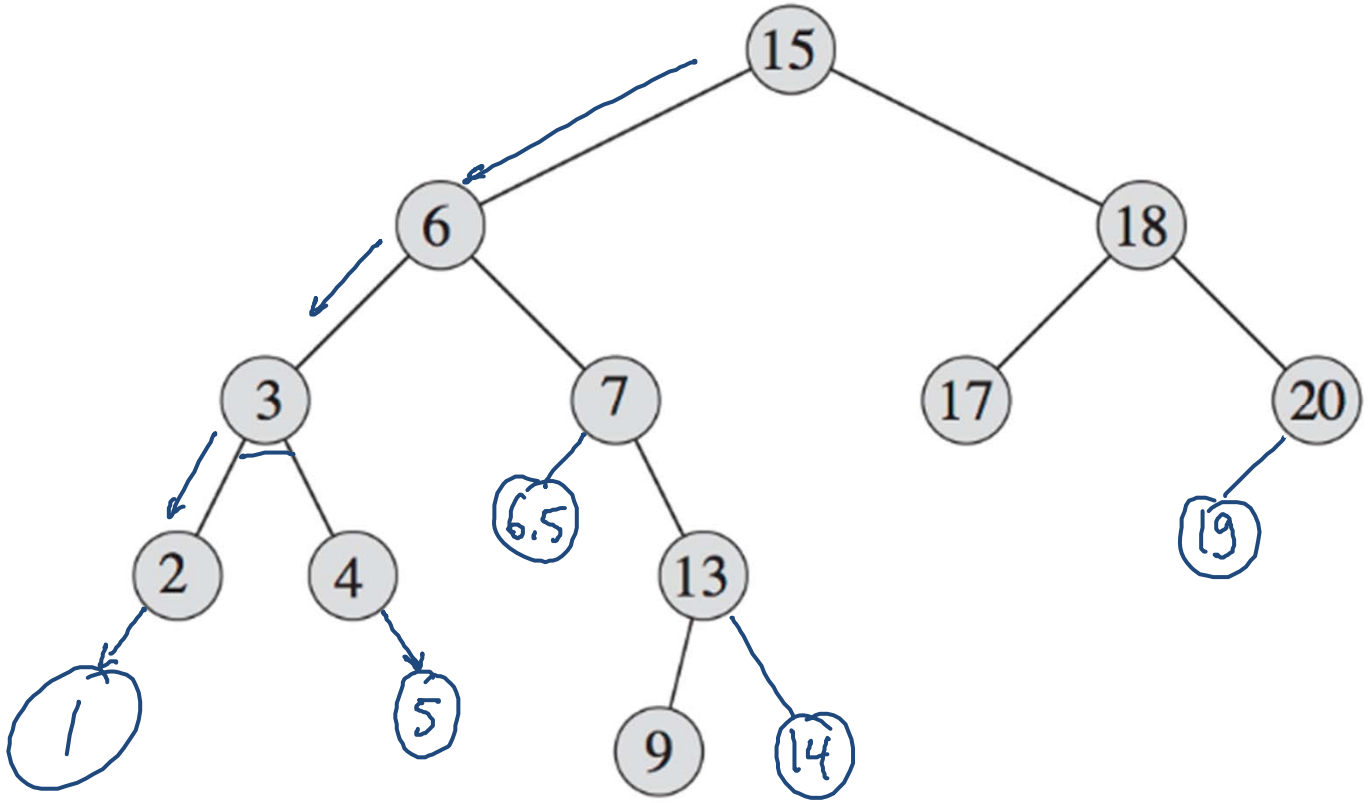

```
pred(node)
    if node.left != null then
      ref. getMax(node.left)
    else
      current = node
      parent = node.parent
      while parent != null and current == parent.left do
          current = parent
          parent = current.parent
    return parent
```

```
getMax(node)
    current = node
    while current.right != null do
        current = current.right
    return current
```

Laufzeit: $O(\text{Tiefe})$

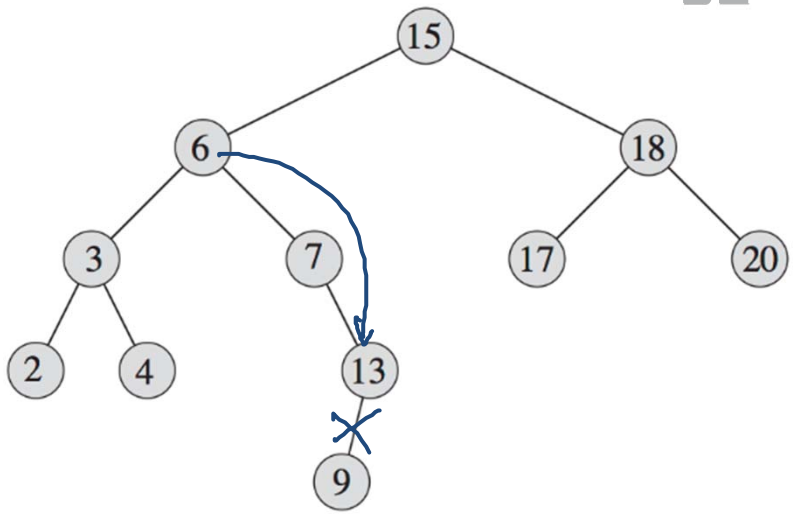
Einfügen eines Schlüssels

Füge Schlüssel 1, 5, 14, 6.5, 19 ein…



Einfügen eines Schlüssels

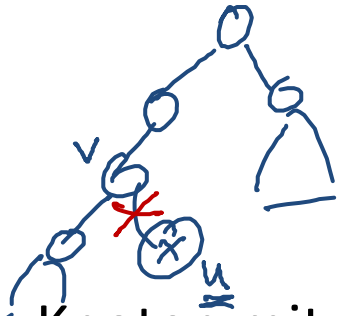
Füge Schlüssel x ein



Löschen eines Schlüssels I

Lösche Schlüssel x, einfache Fälle:

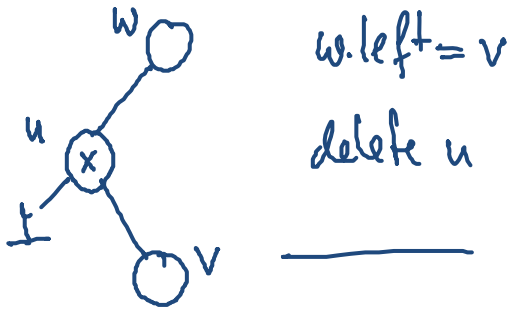
- Schlüssel x ist in einem Blatt des Baums
  - Blatt = Knoten hat keine Kinder



v.right = null

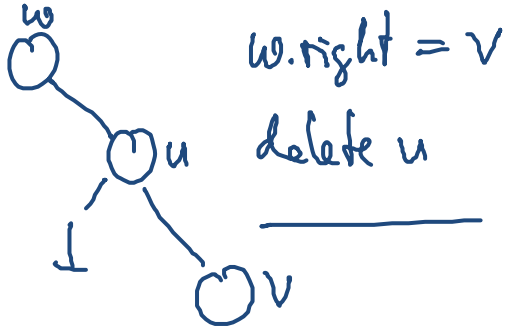
delete u

- Knoten mit Schlüssel x hat nur 1 Kind



w.left = v

delete u



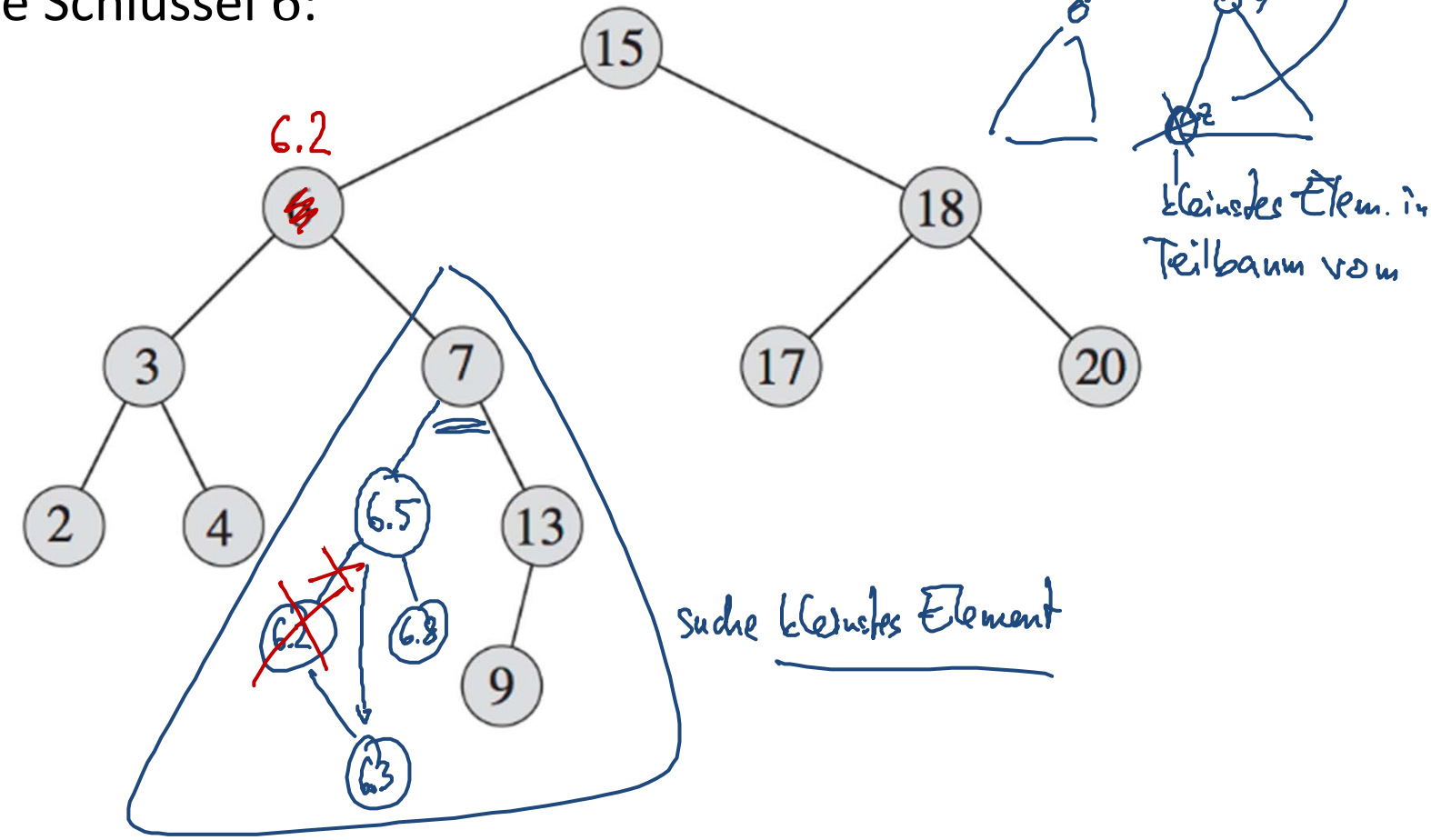
w.right = v

delete u

Löschen eines Schlüssels II

Lösche Schlüssel x, Knoten hat zwei Kinder:

- Lösche Schlüssel 6:



Löschen eines Schlüssels III

UNI FREIBURG

Lösche Schlüssel x, Knoten hat zwei Kinder:

- Vorgänger ist grösster Knoten im linken Teilbaum
  - Vorgänger hat kein rechtes Kind
- Nachfolger ist kleinster Knoten im rechten Teilbaum
  - Nachfolger hat kein linkes Kind
- Schreibe Schlüssel und Daten des Vorgängers (oder alternativ Nachfolgers) in den Knoten von x
- Lösche Vorgänger/Nachfolger-Knoten
  - Vorgänger/Nachfolger ist entweder ein Blatt oder hat nur ein Kind

Löschen eines Schlüssels IV

Lösche Schlüssel x:

1. Finde Knoten u mit $u.key = x$
   - wie üblich mit binärer Suche
2. Falls u nicht 2 Kinder hat, lösche Knoten u
   - Annahme: v ist Parent von u, u ist linkes Kind von v (anderer Fall analog)
   - Fall u ein Blatt ist, wird $v.parent.left = \text{null}$
   - Falls u ein Kind w hat, wird $v.parent.left = w$
3. Falls u zwei Kinder hat, dann bestimme Vorgängerknoten v
   - Funktioniert auch mit Nachfolgerknoten
4. Setze $u.key = v.key$ und $u.data = v.data$
5. Lösche Knoten v (gleich, wie oben u gelöscht wird)
   - Knoten v hat höchstens 1 Kind!

Laufzeit Binärer Suchbaum

UNI FREIBURG

Die Operationen

find, min, max, predecessor, successor, insert, delete

haben alle **Laufzeit $O(\text{Tiefe des Baums})$**.

Was ist die Tiefe eines binären Suchbaums?

Best Case: $\Theta(\log n)$

Worst Case: $\Theta(n)$

Praktische Übungsaufgabe

UNI FREIBURG

Programmieren einer Binary Search Tree Klasse

- Sprache: C++, Java, Python
- Operationen: find, insert, delete, minimum, maximum
- Zusätzlich:
  - toArray (gibt sortiertes Array zurück)
  - avgDepth (gibt durchschnittliche Knotentiefe zurück)

- Vorgabe: Struktur der Klasse
  - Signatur aller public Methoden

- Wir werden jetzt gleich mal die C++-Vorgabe anschauen und eine erste Methode programmieren...