Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 11 (4.6.2014)

Binäre Suchbäume II

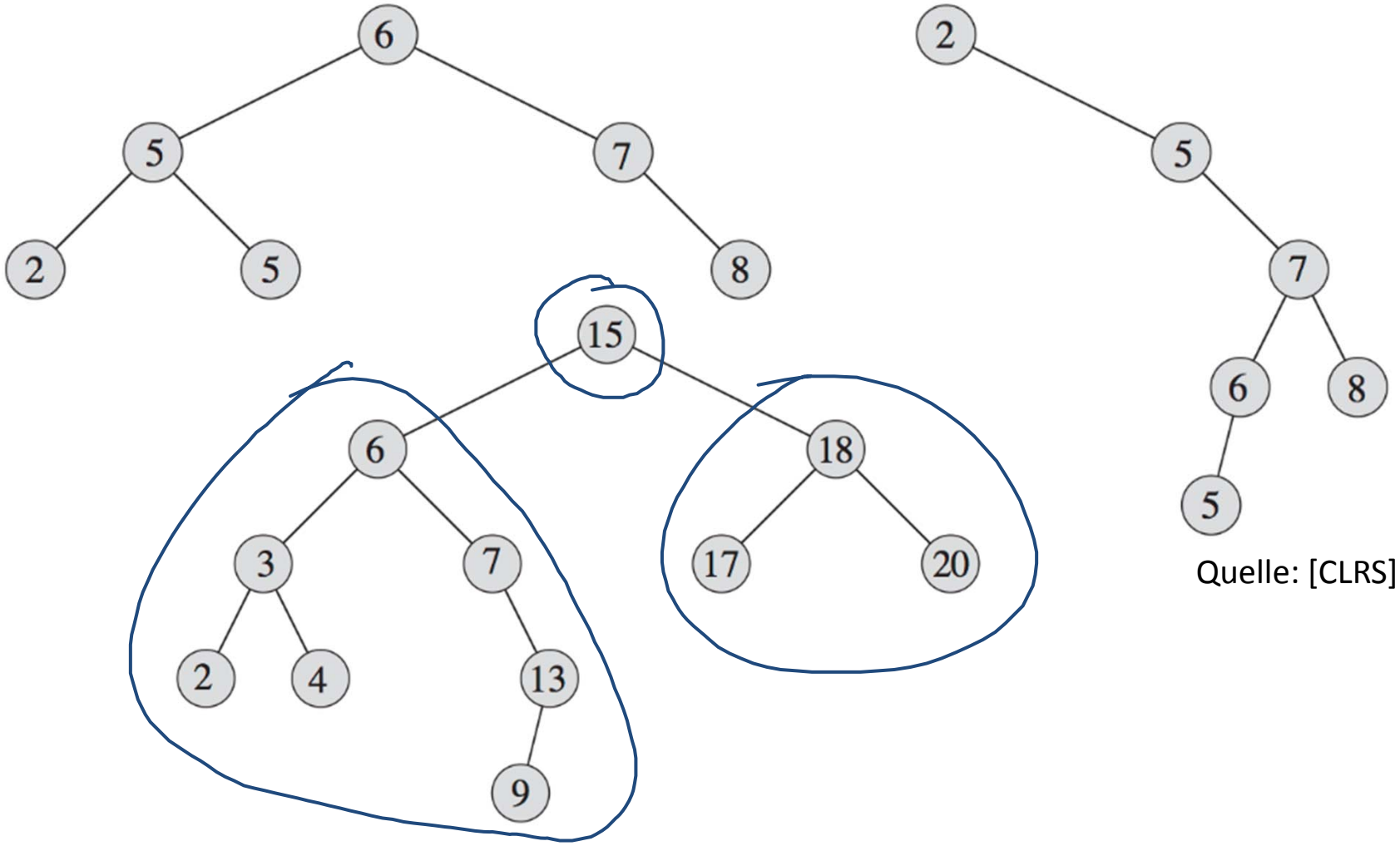
UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Binäre Suchbäume

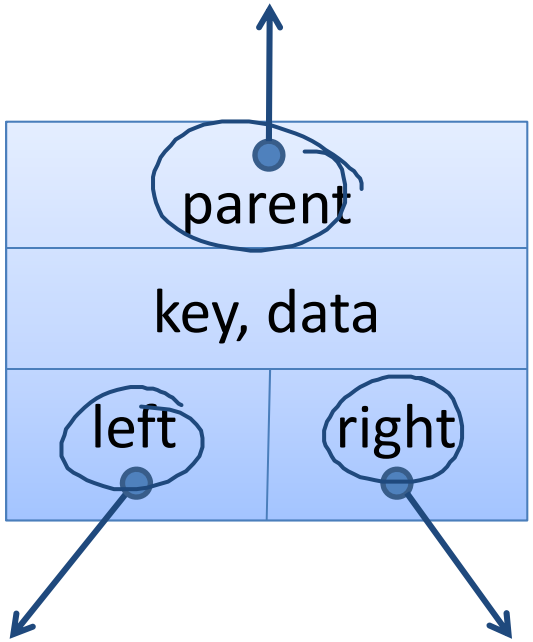
- Binäre Suchbäume müssen nicht immer so schön symmetrisch sein…



Quelle: [CLRS]

Binärer Suchbaum : Elemente

TreeElement:



Implementierung: gleich wie bei den Listen-Elementen

Laufzeit Binärer Suchbaum

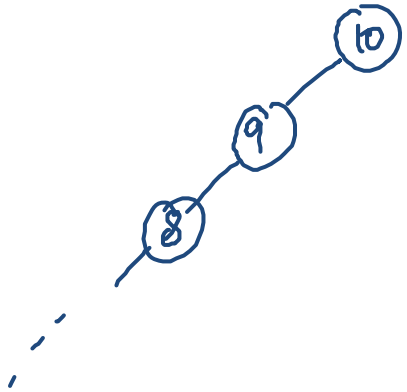
Die Operationen

find, min, max, predecessor, successor, insert, delete

haben alle **Laufzeit $O(\text{Tiefe des Baums})$**.

Was ist die Tiefe eines binären Suchbaums?

- Best Case: $\Theta(\log n)$
- Worst Case: $\Theta(n)$



Praktische Übungsaufgabe

UNI FREIBURG

Programmieren einer Binary Search Tree Klasse

- Sprache: C++, Java, Python
- Operationen: find, insert, delete, size
- Zusätzlich:
  - toArray (gibt sortiertes Array zurück)
  - avgDepth (gibt durchschnittliche Knotentiefe zurück)

- Vorgabe: Struktur der Klasse
  - Signatur aller public Methoden

- Wir werden jetzt gleich mal die C++-Vorgabe anschauen und eine erste Methode programmieren...

Sortieren mit binärem Suchbaum

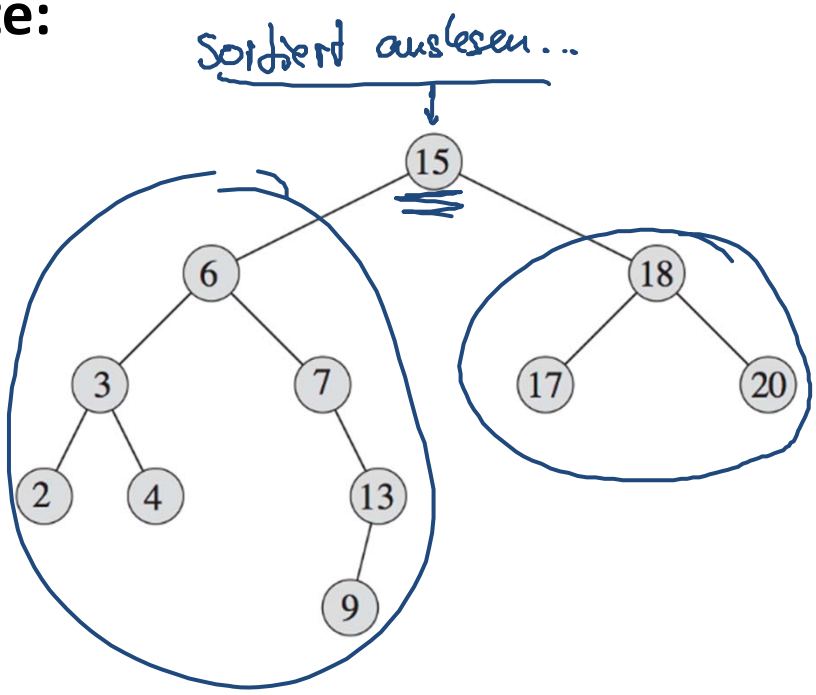
1. Füge alle Elemente in einen binären Suchbaum ein
2. Lese die Elemente in sortierter Reihenfolge aus
   - Einfachste Lösung: suche und entferne das Minimum
   - Oder: suche Minimum und dann $n-1$ Mal *getSuccessor*

$O(n \cdot \text{Tiefe})$

Best case: $O(n \log n)$

Bessere Lösung: Auslesen aller Elemente:

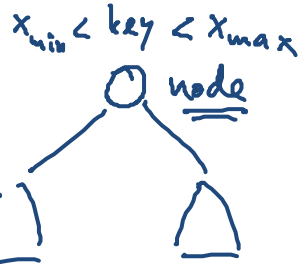
- Rekursiv:
  1. Lese linken Teilbaum aus (rekursiv)
  2. Lese Wurzel aus
  3. Lese rechten Teilbaum aus (rekursiv)

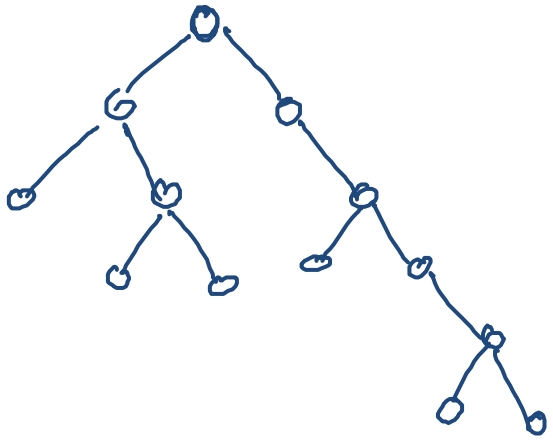


Auslesen eines Teils der Elemente

Gegeben: Schlüssel $x_{\min}$ und $x_{\max}$ $(x_{\min} \leq x_{\max})$

Ziel: Gebe **alle Schlüssel x, $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$** aus.



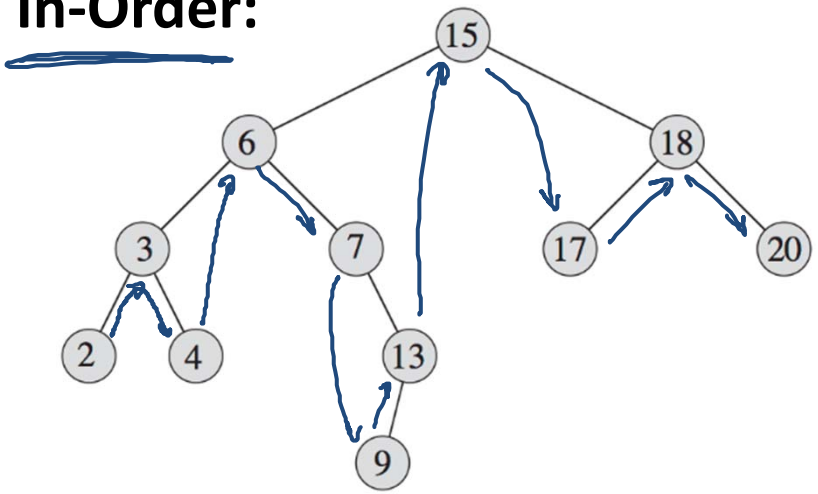


```
if (node.key > x_min) then
    visit(node.left, x_min, x_max)
if x_min ≤ node.key ≤ x_max then
    visit(node)
if (node.key < x_max) then
    visit(node.right, x_min, x_max)
```

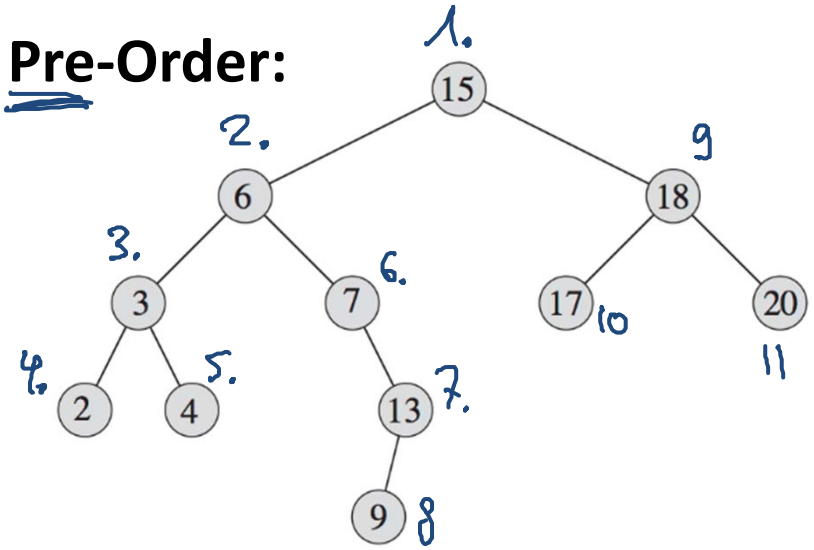
Traversieren eines binären Suchbaums

Ziel: Besuche alle Knoten eines binären Suchbaums einmal

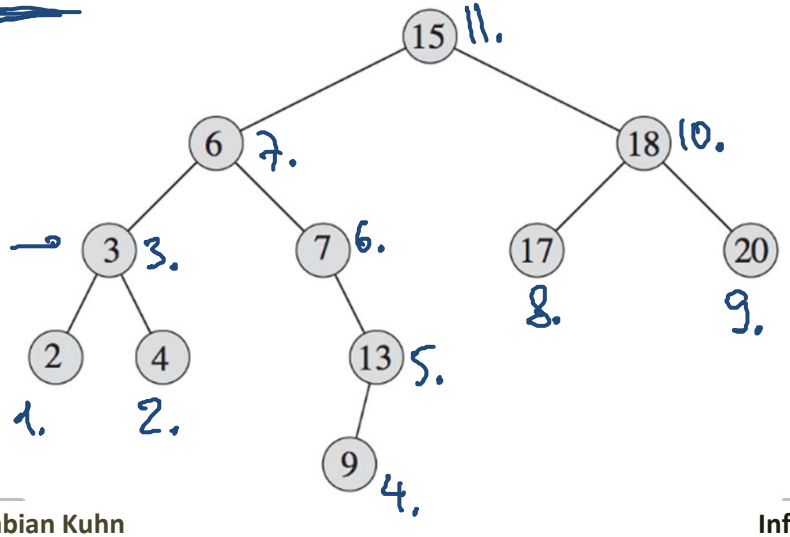
In-Order:



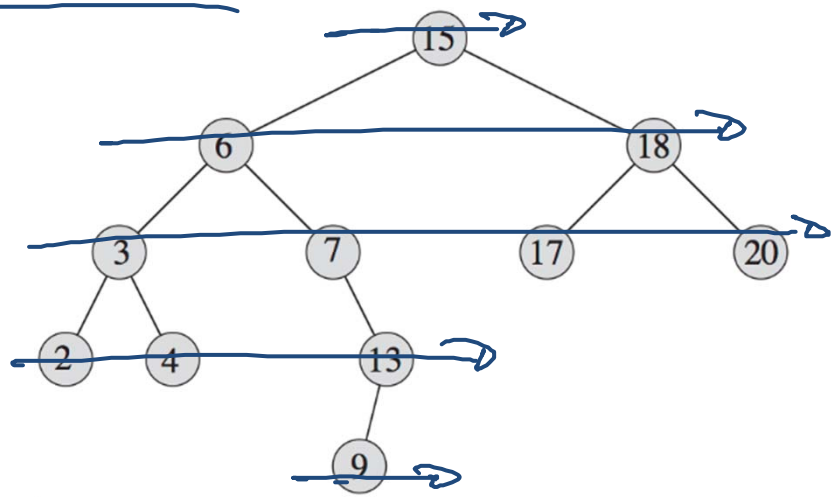
Pre-Order:



Post-Order:



Level-Order:



Traversieren eines binären Suchbaums

UNI FREIBURG

Tiefensuche (Depth First Search / DFS Traversal)

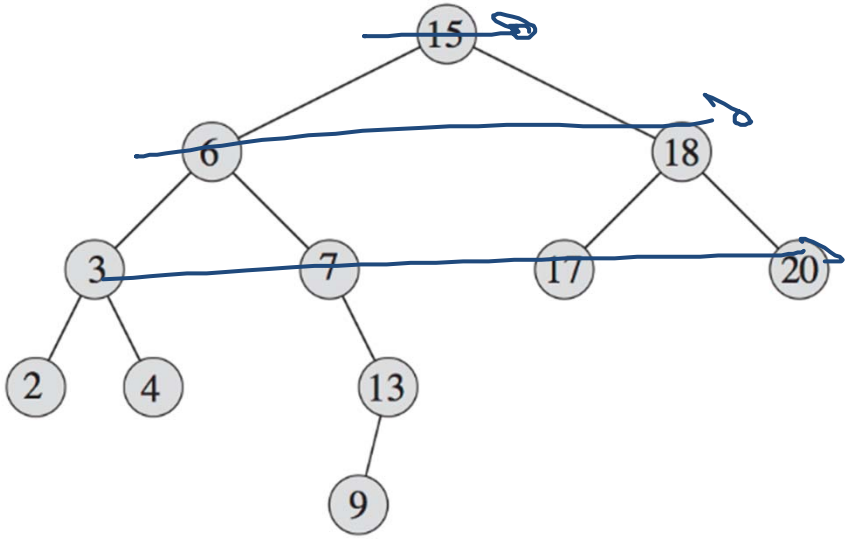
Pre-Order: 15, 6, 3, 2, 4, 7, ...

In-Order: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13, ...

Post-Order: 2, 4, 3, 9, 13, 7, 6, ...

Breitensuche (Breadth First Search / BFS Traversal)

Level-Order: 15, 6, 18, 3, ...



Tiefensuche / DFS Traversierung

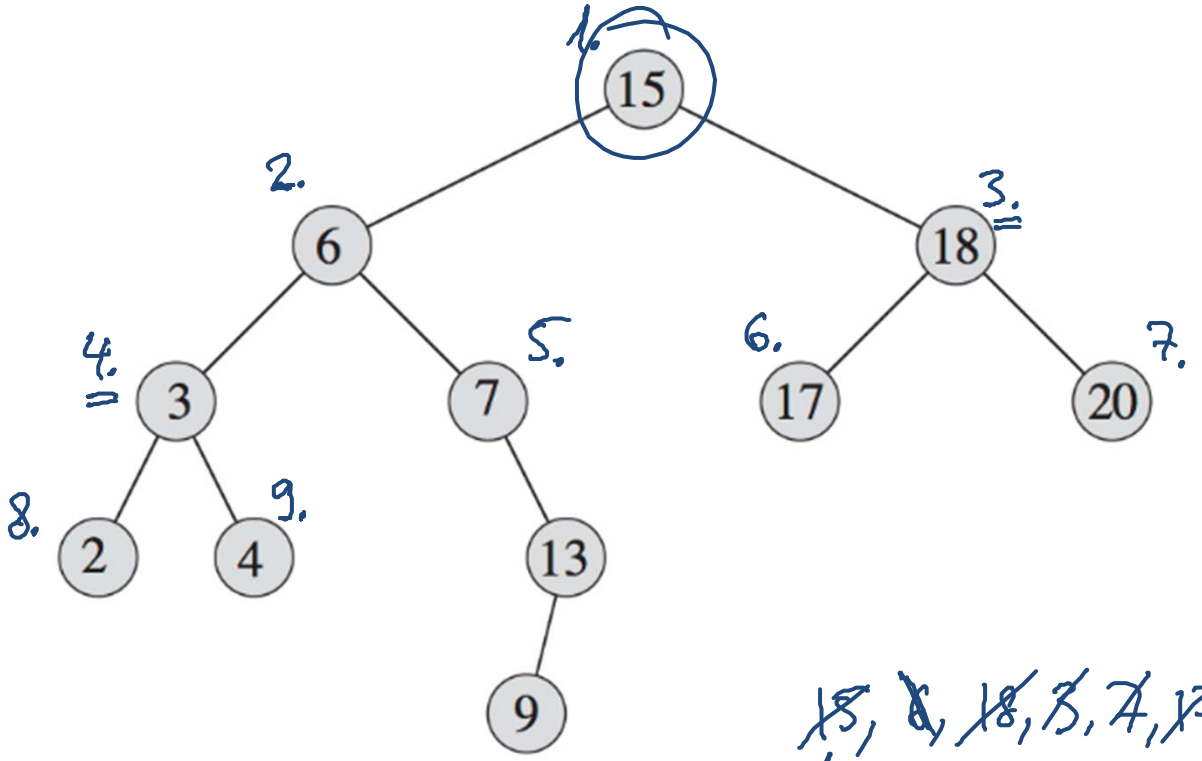
```
preorder(node):
    if node != null
        visit(node)
        preorder(node.left)
        preorder(node.right)

inorder(node):
    if node != null
        inorder(node.left)
        visit(node)
        inorder(node.right)

postorder(node):
    if node != null
        postorder(node.left)
        postorder(node.right)
        visit(node)
```

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche



Warteschlange

15, 6, 18, 3, 7, 17, 20, 2, 4, 13, 9

15, 6, 18, 3, 7, 17, 20, 2, 4, 13, 9

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche
- Lösung mit einer Warteschlange:
  - Wenn ein Knoten besucht wird, werden seine Kinder in die Queue eingereiht

```
BFS-Traversal:
    Q = new Queue()
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        node = Q.dequeue()
        visit(node)
        if node.left != null
            Q.enqueue(node.left)
        if node.right != null
            Q.enqueue(node.right)
```

Laufzeit: $O(n)$

$O(1)$

Analyse Baum-Traversierung

UNI FREIBURG

Tiefensuche:

- Jeder Knoten wird genau einmal besucht
- Kosten pro Knoten: $O(1)$
- **Gesamtzeit** für DFS Traversierung: $\boldsymbol{O(n)}$

Breitensuche:

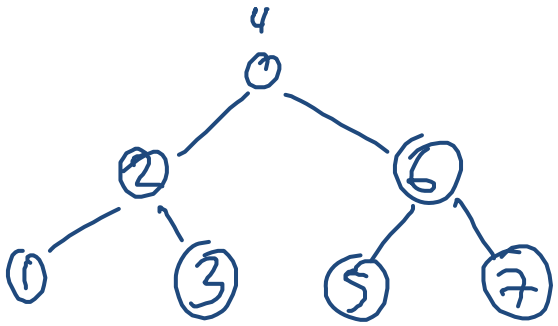
- Jeder Knoten wird genau einmal besucht
  - Kosten pro Knoten ist linear in der Anzahl Kinder
  - Aber: Jeder Knoten wird genau einmal in die FIFO-Queue eingefügt
- Kosten pro Knoten (amortisiert): $O(1)$
- **Gesamtzeit** für BFS Traversierung: $\boldsymbol{O(n)}$

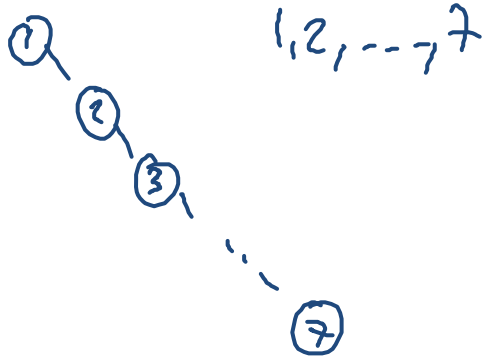
Anwendungen Tiefensuche I

In-Order Traversierung:

- Besucht die Elemente eines binären Suchbaums in sortierter Reihenfolge
- Sortieren:
  1. Einfügen aller Elemente
  2. In-Order Traversierung

- Beobachtung: Reihenfolge hängt nur von der Menge der Elemente (Schlüssel) ab, nicht aber von der Struktur des Baums





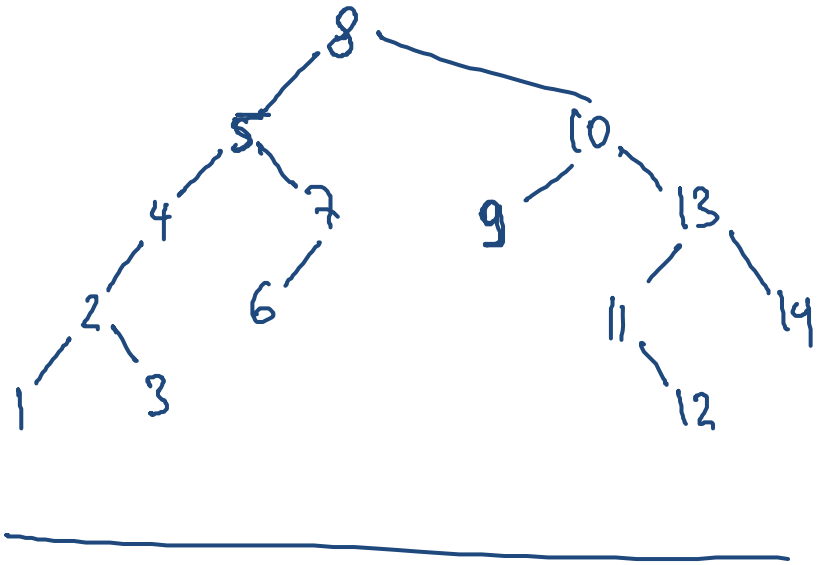
Anwendungen Tiefensuche II

UNI FREIBURG

Pre-Order Traversierung:

- Aus der Pre-Order-Reihenfolge lässt sich der Baum in eindeutiger (und effizienter) Weise rekonstruieren
- Geeignet, um den Baum z.B. in einer Datei zu speichern

Beispiel: Pre-Order $8, 5, 4, 2, 1, 3, 7, 6, 10, 9, 13, 11, 12, 14$

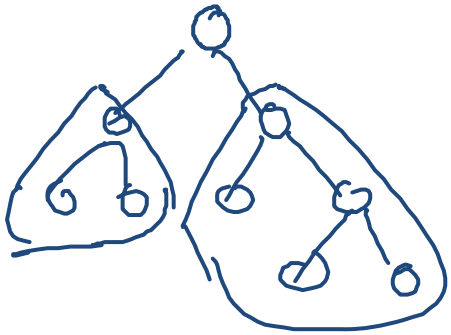


Anwendungen Tiefensuche III

UNI FREIBURG

Post-Order Traversierung:

- Löschen eines ganzen binären Suchbaums
- Zuerst muss der Speicher der Teilbäume freigegeben werden, dann kommt die Wurzel



```
delete-tree(node)
    if (node != null)
        delete-tree(node.left)
        delete-tree(node.right)
        delete node
```

Tiefe eines binären Suchbaums

Worst-Case Laufzeit der Operationen in binären Suchbäumen:

$$O(\text{Tiefe des Baums})$$

- Im **besten Fall** ist die Tiefe $\log_2 n$
  - Definition Tiefe: Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt
- Im **schlechtesten Fall** ist die Tiefe $n - 1$

Was ist die Tiefe in einem typischen Fall?

- Was ist ein typischer Fall?

Ist es möglich, in einem binären Suchbaum immer Tiefe $O(\log n)$ zu garantieren?

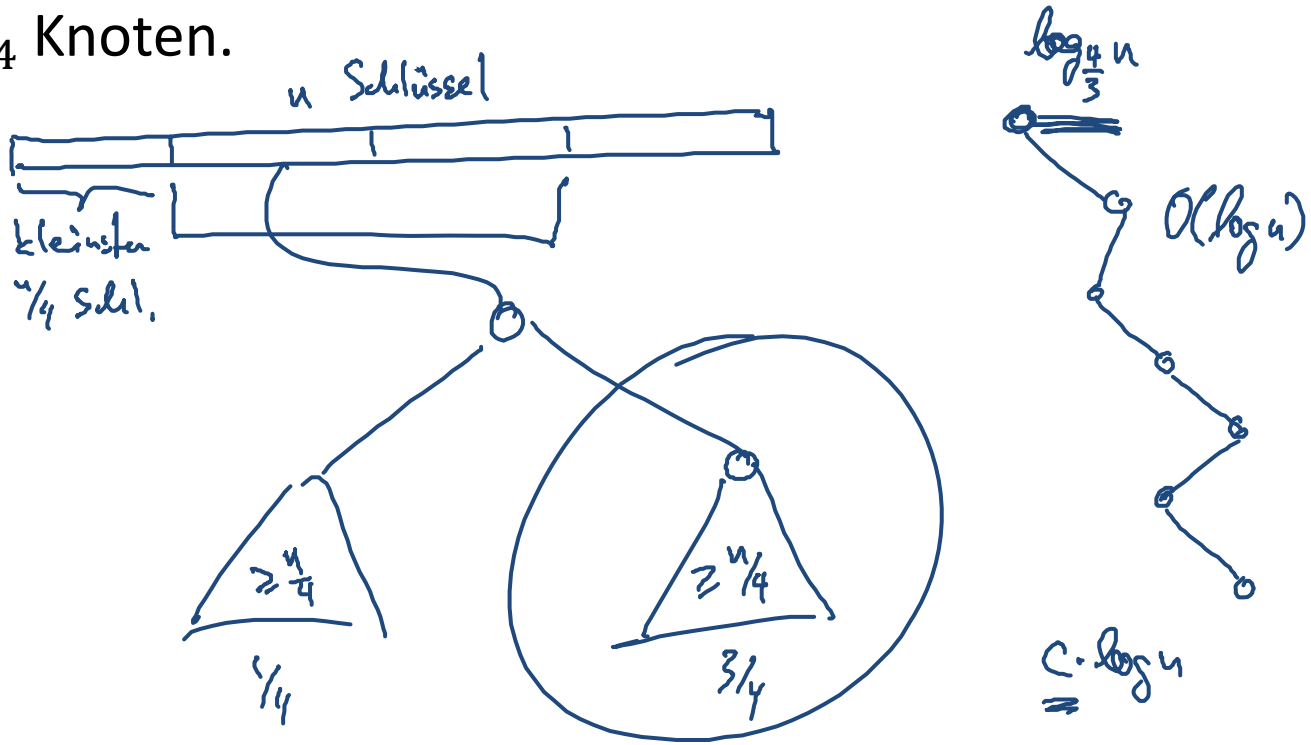
“Typischer” Fall

Zufälliger binärer Suchbaum:

- **n Schlüssel werden in zufälliger Reihenfolge eingefügt**

Beobachtung:

- Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ haben beide Teilbäume der Wurzel mindestens $n/4$ Knoten.



“Typischer” Fall

UNI FREIBURG

Zufälliger binärer Suchbaum:

- **n Schlüssel werden in zufälliger Reihenfolge eingefügt**

Beobachtung:

- Mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ haben beide Teilbäume der Wurzel mindestens $n/4$ Knoten.
- Analoges gilt auch für alle Teilbäume
- Im Durchschnitt wird deshalb auf jedem 2. Schritt von der Wurzel Richtung eines Blattes, der Teilbaum um einen Faktor $3/4$ kleiner!
- Verkleinern um einen Faktor $3/4$ geht nur $O(\log n)$ oft.
- Tiefe eines zufälligen binären Suchbaums ist deshalb $O(\log n)$
- Genaue Rechnung ergibt:

Tiefe eines zufälligen bin. Suchbaums: $\mathbf{4.311 \cdot \ln n}$

“Typischen” Fall erzwingen?

UNI FREIBURG

“Typischer” Fall:

- Falls die Schlüssel in zufälliger Reihenfolge eingefügt werden, hat der Baum Tiefe $O(\log n)$
- Operationen haben Laufzeit $O(\log n)$

Problem:

- Zufällige Reihenfolge ist nicht unbedingt der typische Fall!
- Vorsortierte Werte kann genau so typisch sein
  - Das ergibt einen sehr schlechten binären Suchbaum

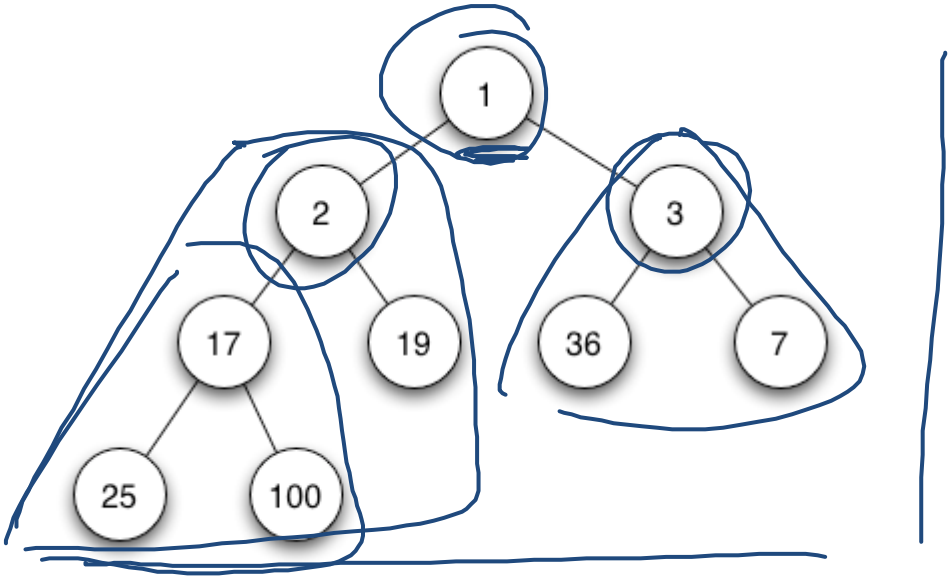
Idee:

- Können wir zufällige Reihenfolge "erzwingen"?
- Schlüssel werden in beliebiger Reihenfolge eingefügt, aber Struktur soll immer wie bei zufälliger Reihenfolge sein!

Heap

Heap (Min-Heap) Eigenschaft:

- Gegeben ein Baum, jeder Knoten einen Schlüssel
- Ein Baum hat die Min-Heap Eigenschaft, falls in jedem Teilbaum, die Wurzel den kleinsten Schlüssel hat



- Heaps sind auch die “richtige” Datenstruktur, um Prioritätswarteschlangen zu implementieren
  - werden wir noch behandeln

Kombination Binary Search Tree / Heap

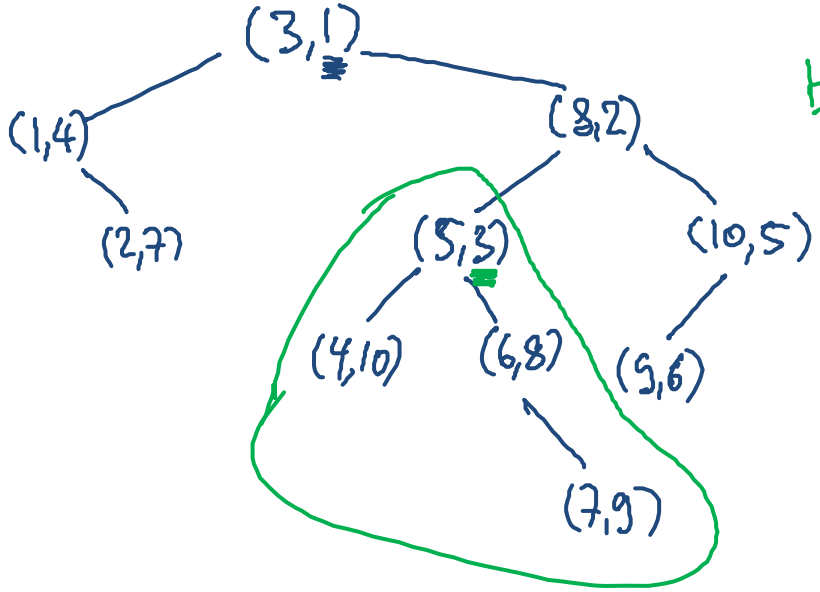
Annahme:

- Jedes Element hat zwei eindeutige Schlüssel *key1* und *key2*

Ziel:

- Binärer Suchbaum bezüglich *key1*
- Einfügen in Reihenfolge, welche durch *key2* gegeben ist

Beispiel: $(1,4), (2,7), (3,1), (4,10), (5,3), (6,8), (7,9), (8,2), (9,6), (10,5)$



bezügl. key2
↳ Min-Heap

Treap: Kombination BST / Heap

UNI FREIBURG

Annahme:

- Jedes Element hat zwei eindeutige Schlüssel *key1* und *key2*

Treap:

- Binärer Suchbaum bezüglich *key1*
- Min-Heap bezüglich *key2*
- Entspricht bin. Suchbaum der Schlüssel *key1*, in welchen die Schlüssel in der durch *key2* geg. Reihenfolge eingefügt wurden

Ziel:

- Zu jedem Primärschlüssel (*key1*) wird zusätzlich ein zufälliger Schlüssel *key2* $\in [0,1]$ bestimmt
- Stelle bei jedem insert / delete sicher, dass der Baum ein Treap bezüglich der Schlüssel *key1* und *key2* ist!
- Enspricht bin. Suchbaum mit zufälliger Einfügereihenfolge