Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 14 (25.6.2014)

Graphen: Einführung

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

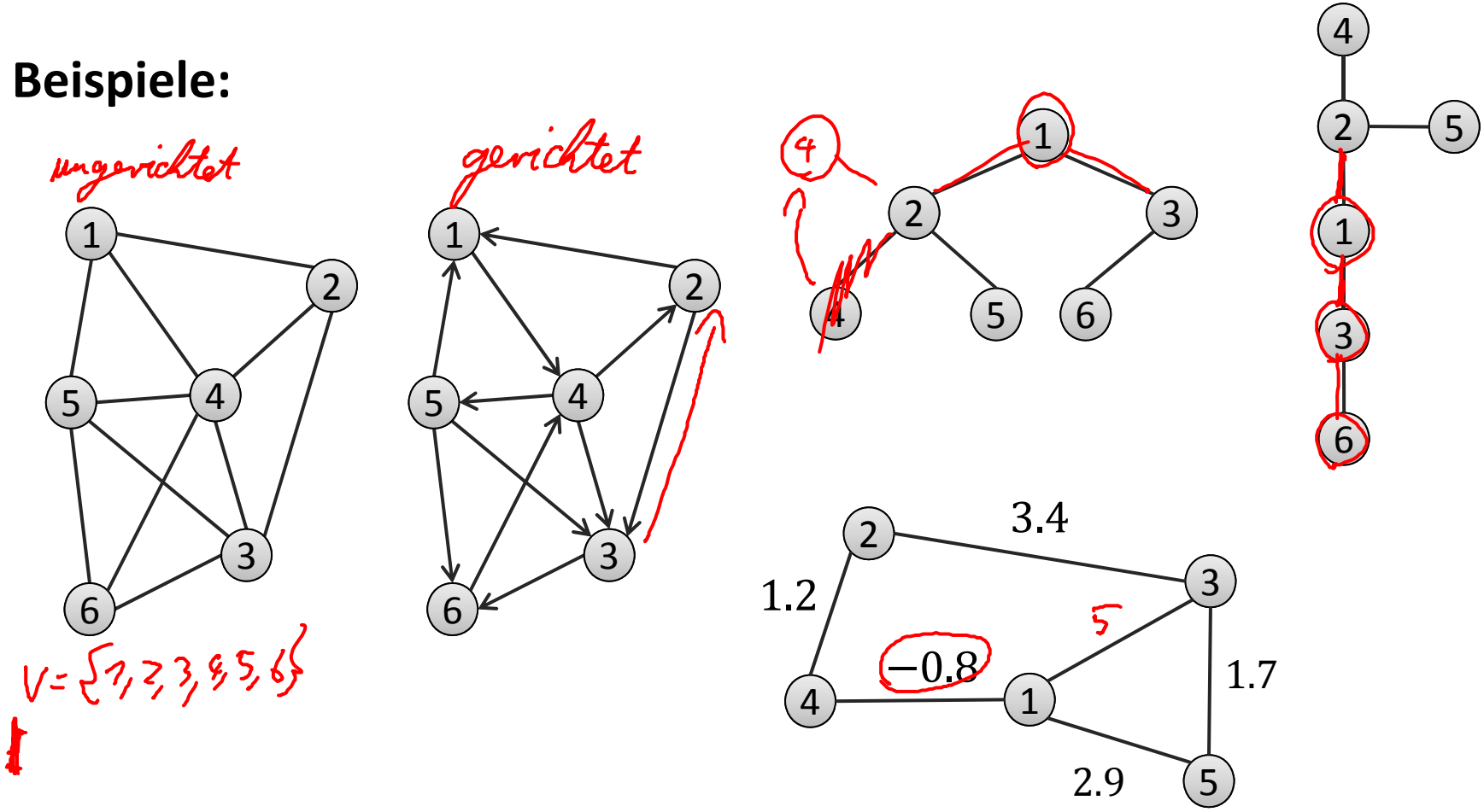
Algorithmen und Komplexität

Graph

Graph $G = (V, E)$:

- Knotenmenge V und Kantenmenge E

Beispiele:



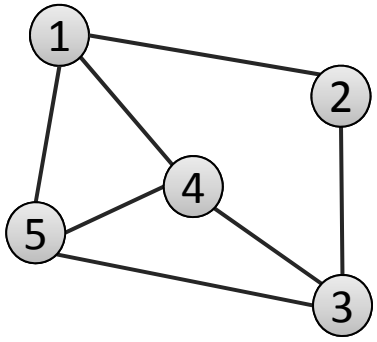
Graph: Notation

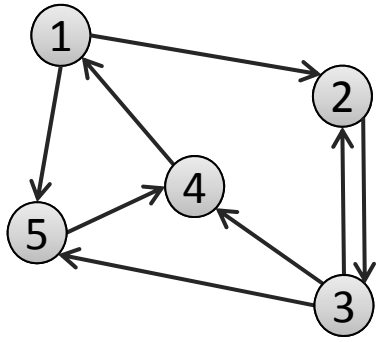
Knotenmenge V, typischerweise $n := |V|$

Kantenmenge E, typischerweise $m := |E|$ $\leq O(|V|^2) = O(n^2)$

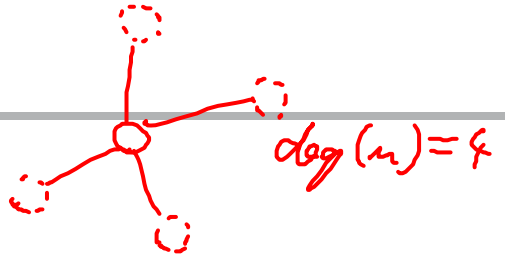
- ungerichteter Graph: $E \subseteq \{\{u,v\} : u,v \in V\} = \binom{V}{2}$
- gerichteter Graph: $E \subseteq V \times V$

Beispiele:





Knotengrade



Graph $G = (V, E)$ ungerichtet:

- Grad eines Knoten $u \in V$: Anzahl Kanten (Nachbarn) von u

$$\deg(u) := |\{u, v\} : \{u, v\} \in E|$$

degree

Graph $G = (V, E)$ gerichted:

- Eingangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl eingehende Kanten

$$\deg_{in}(u) := |(v, u) : (v, u) \in E|$$

in-degree

- Ausgangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl ausgehende Kanten

$$\deg_{out}(u) := |(u, v) : (u, v) \in E|$$

out-degree

Pfade

Pfade in einem Graph $G = (V, E)$

- Ein Pfad in G ist eine Folge $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ mit
  - gerichteter Graph: $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
  - ungerichteter Graph: $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$

$u_i \neq u_j \quad \forall i \neq j$ (andernfalls spricht man von einem Weg)

Länge eines Pfades (z. T. auch Kosten eines Pfades)

- ohne Kantengewichte: Anzahl der Kanten
- mit Kantengewichten: Summe der Kantengewichte

Kürzester Pfad (shortest path) zwischen Knoten u und v

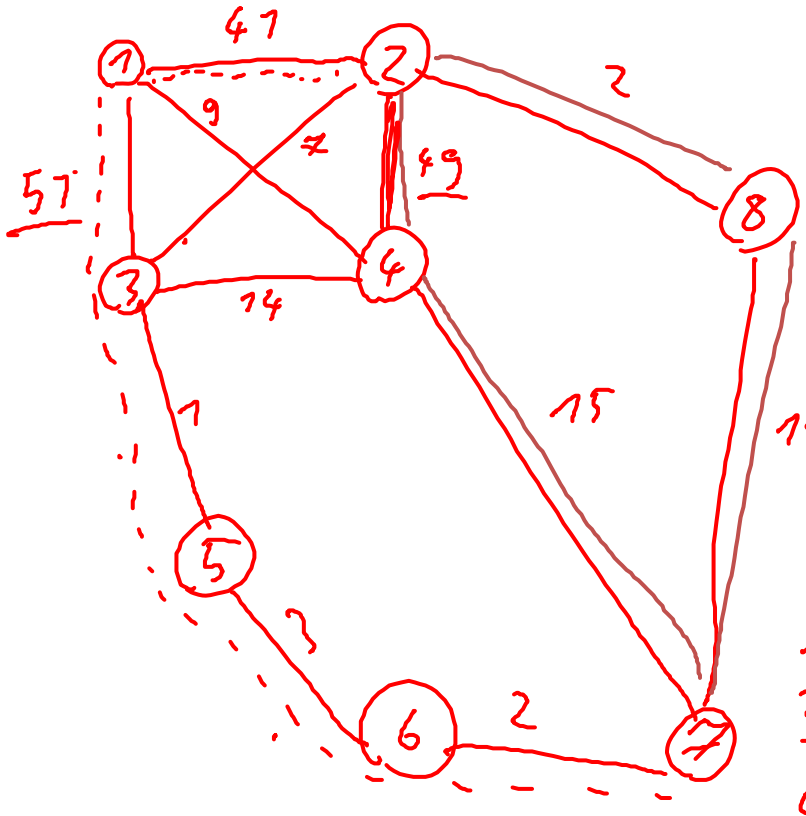
- Pfad $u, \dots, v$ mit kleinster Länge
- **Distanz** $d(u, v)$: Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v

Durchmesser $D := \max_{u,v \in V} d(u, v)$

- Länge des längsten kürzesten Pfades

Beispiele: Pfade, Distanzen, Durchmesser

Ungerichteter Graph



(ungerichtet)

Pfad von 2 nach 7: 2, 1, 3, 5, 6, 7 (l: 5)

kürzester Pfad: 2, 4, 7 oder 2, 8, 7 (l: 2)

Durchmesser: 3 (von 5 zu 8)

(gerichtet)

Pfad v. 2 n. 7: 2, 1, 3, 5, 6, 7 (l: 98)

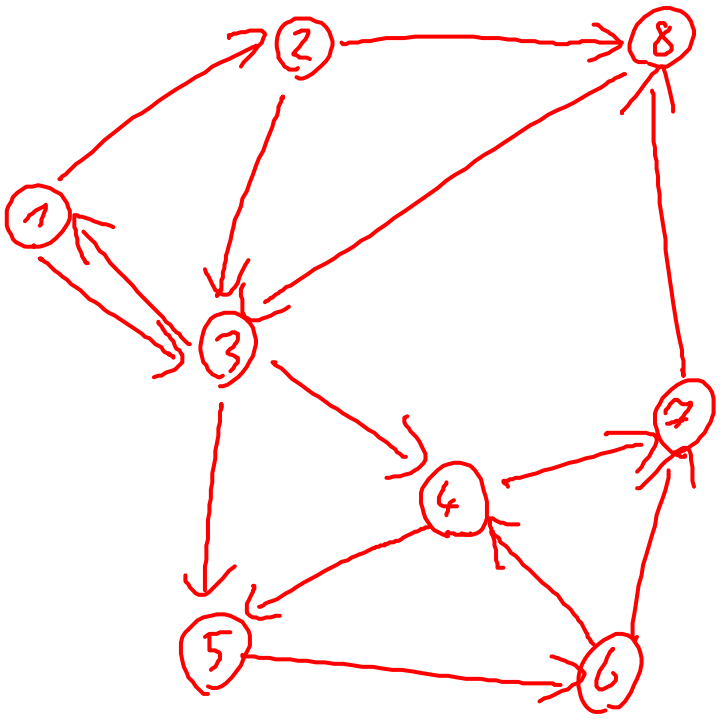
kürzester Pfad: 2, 3, 5, 6, 7 (l: 13)

Durchmesser:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		30	23	9	24	26	24	32
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Beispiele: Pfade, Distanzen, Durchmesser

Gerichteter Graph



Pfad v. 2 nach 7: 2, 8, 3, 5, 6, 7 (l: 5)

kürzester: 2, 3, 4, 7 (l: 3)

Durchmesser: 6

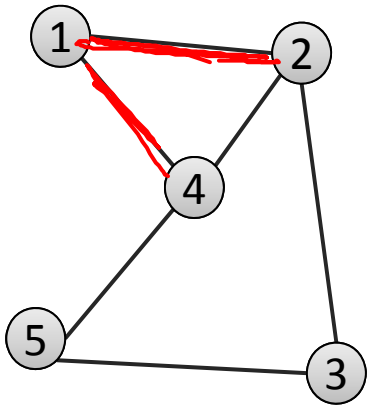
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	2	2	3	3	2
2		0						
3								
4	4	5	3	0	1	2	1	2
5	5	6	4	2	0	1	2	3
6								
7								
8								

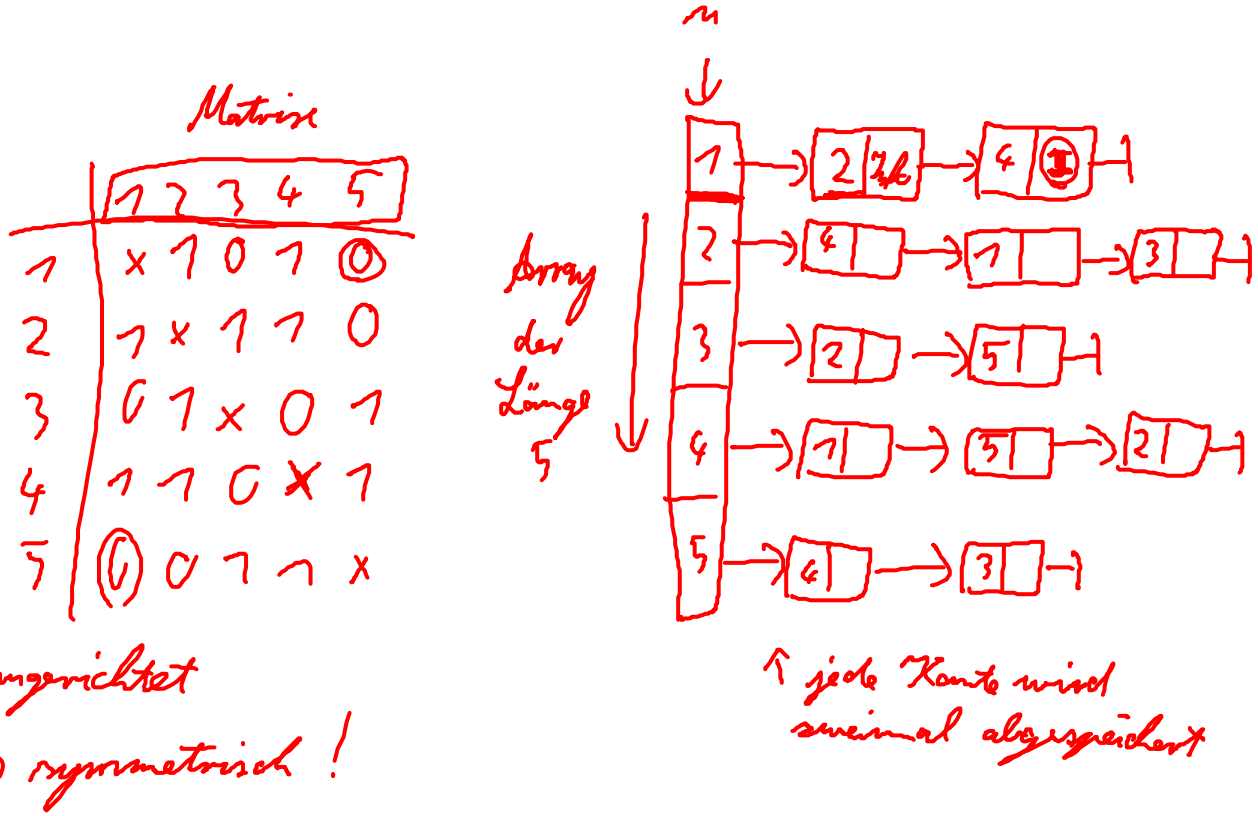
Repräsentation von Graphen

Zwei klassische Arten, einen Graphen im Rechner zu repräsentieren

- **Adjazenzmatrix:** Platzverbrauch $O(|V|^2) = O(n^2)$
- **Adjazenzlisten:** Platzverbrauch $O(|V| + |E|) = O(n + m)$

Beispiel:





Adjazenzmatrix

Details:

- Bei **Kantengewichten**, trägt man die Gewichte (statt $0/1$) in die Matrix ein (implizit: Gewicht 0 = Kante existiert nicht)
- **Gerichtete Graphen:** Ein Eintrag pro gerichtete Kante
  - Kante von i nach j: Eintrag in Zeile i und Spalte j
- **Ungerichtete Graphen:** Zwei Einträge pro Kante
  - Matrix ist in diesem Fall symmetrisch

Eigenschaften Adjazenzmatrix:

- Speichereffizient, falls $|E| = m \in \Theta(|V|^2) = \Theta(n^2)$
  - speziell für ungewichtete Graphen: nur ein Bit pro Matrixeintrag
- Nicht speichereffizient bei "dünn" besetzten Graphen ($m \in o(n^2)$)
- Für gewisse Algorithmen, die "richtige" Datenstruktur
- "Kante zwischen u und v" kann in $O(1)$ Zeit beantwortet werden

Adjazenzlisten

← Standardspeichermethode für nicht-dichte Graphen

UNI FREIBURG

Struktur

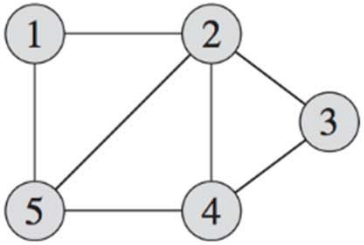
- Ein Array (oder eine verkettete Liste) mit allen Knoten
- Einträge in diesem Knotenarray (oder der Liste):
  - Verkettete Listen (Arrays) mit allen Kanten des Knoten

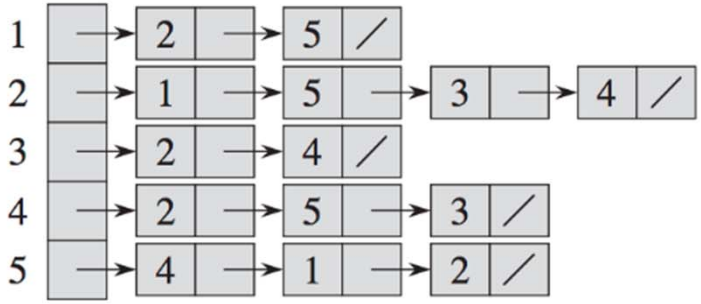
Eigenschaften

- Speichereffizient bei dünn besetzten Graphen
- Speichereffizienz immer asymptotisch optimal
  - aber bei dicht besetzten Graphen trotzdem deutlich schlechter als die Matrix
- Abfragen nach bestimmten Kanten nicht besonders schnell
  - Falls nötig, eine zusätzliche Datenstruktur (z.B. Hashtabelle) anlegen
- Für viele Algorithmen, die “richtige” Datenstruktur
- Z.B. für Tiefensuche (und Breitensuche)

Beispiele

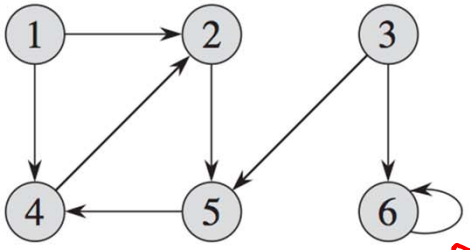
Beispiele aus [CLRS]:



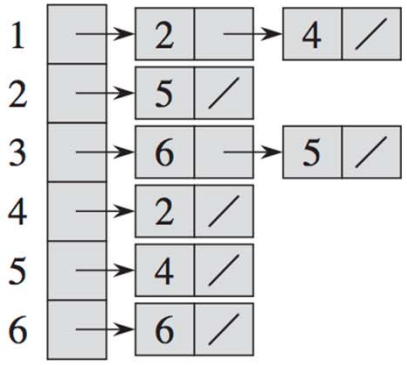


	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

symmetrisch



self-loop



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

nicht symmetrisch

Graph-Traversierung

UNI FREIBURG

Graph-Traversierung (Graph-Exploration) informell

- Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$, besuche "systematisch" alle Knoten, welche von s aus erreichbar sind.
- Das haben wir bereits bei den Binärbäumen gesehen
- Wie bei den Bäumen gibt es zwei grundsätzliche Verfahren

- **Breitensuche (BFS = breadth first search)**
  - zuerst "in die Breite" (nähere Knoten zu s zuerst)

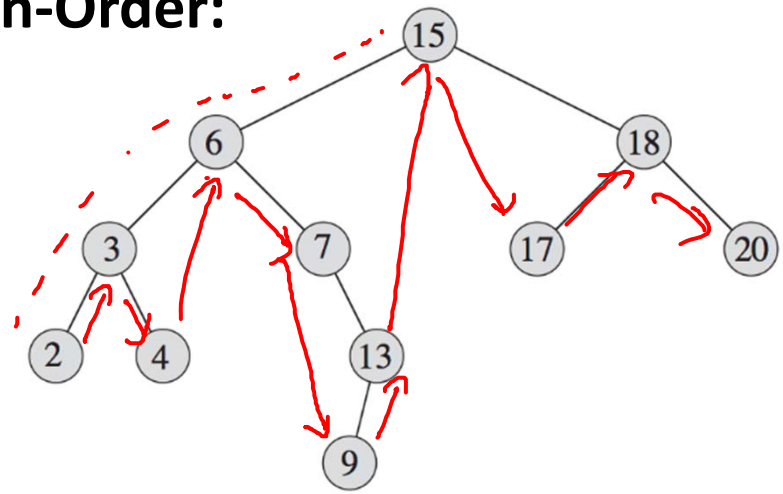
- **Tiefensuche (DFS = depth first search)**
  - zuerst "in die Tiefe" (besuche alles, was an einem Knoten u "dranhängt", bevor der nächste Nachbar von u besucht wird)

- Graph-Traversierung ist wichtig, da es oft als Subroutine auftaucht
  - z.B., um die Zusammenhangskomponenten eines Graphen zu finden
  - Wir werden einige Beispiele sehen…

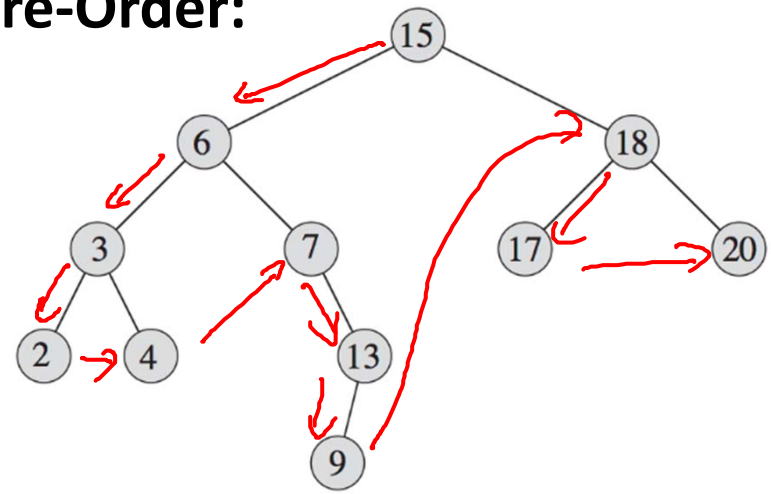
Traversieren eines binären Suchbaums

Ziel: Besuche alle Knoten eines binären Suchbaums einmal

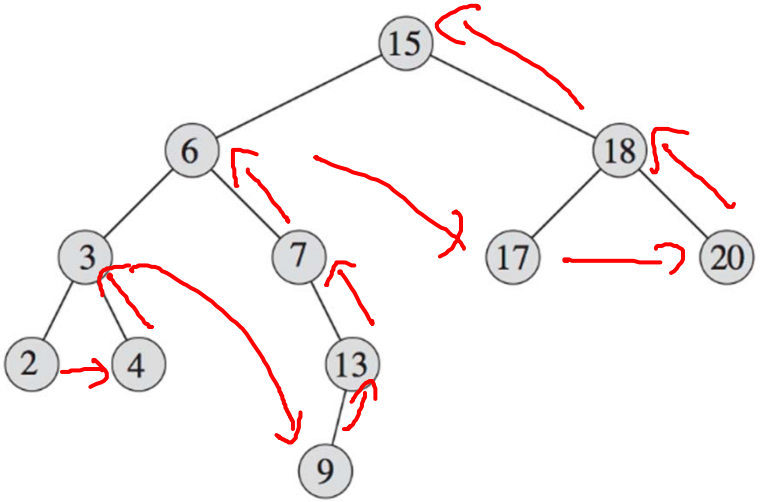
In-Order:



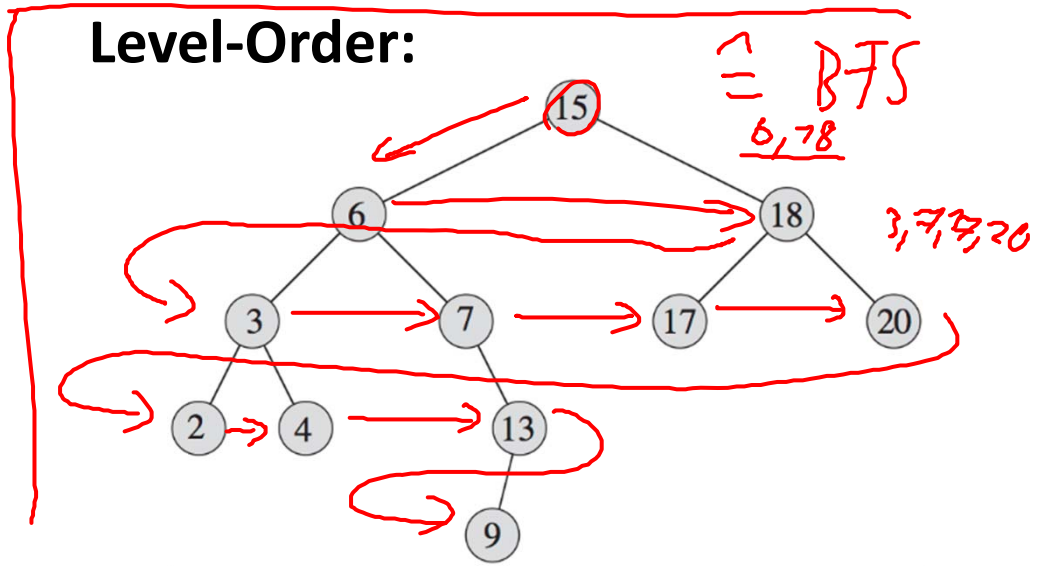
Pre-Order:



Post-Order:



Level-Order:

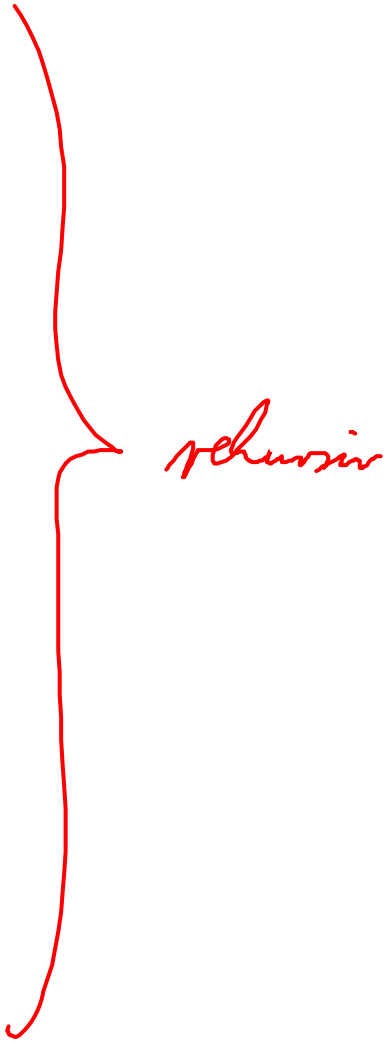


Tiefensuche / DFS Traversierung

```
preorder(node):
    if node != null
        visit(node)
        preorder(node.left)
        preorder(node.right)

inorder(node):
    if node != null
        inorder(node.left)
        visit(node)
        inorder(node.right)

postorder(node):
    if node != null
        postorder(node.left)
        postorder(node.right)
        visit(node)
```



Breitensuche (BFS Traversierung)

UNI FREIBURG

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche
- Lösung mit einer Warteschlange:
  - Wenn ein Knoten besucht wird, werden seine Kinder in die Queue eingereiht

```
BFS-Traversal:
    Q = new Queue()
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        node = Q.dequeue()
        visit(node)
        if node.left != null
            Q.enqueue(node.left)
        if node.right != null
            Q.enqueue(node.right)
```

Breitensuche von allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Unterschiede Binärbaum T $\Leftrightarrow$ allg. Graph G

- Graph G kann Zyklen haben
- In T haben wir eine Wurzel und kennen von jedem Knoten die Richtung zur Wurzel
  - etwas allgemeiner bezeichnen wir solche Bäume auch als gewurzelte Bäume

Breitensuche in Graph G (Start bei Knoten $s \in V$)

- **Zyklen: markiere** Knoten, welche man schon gesehen hat
- **Markiere** Knoten s, hänge s in die Queue
- Wie bisher, nehme immer den ersten Knoten u aus der Queue:
  - **besuche Knoten u**
  - Gehe durch die Nachbarn v von u
    Falls v nicht markiert, markiere v und hänge v in Queue
    Falls v markiert ist, muss nichts getan werden

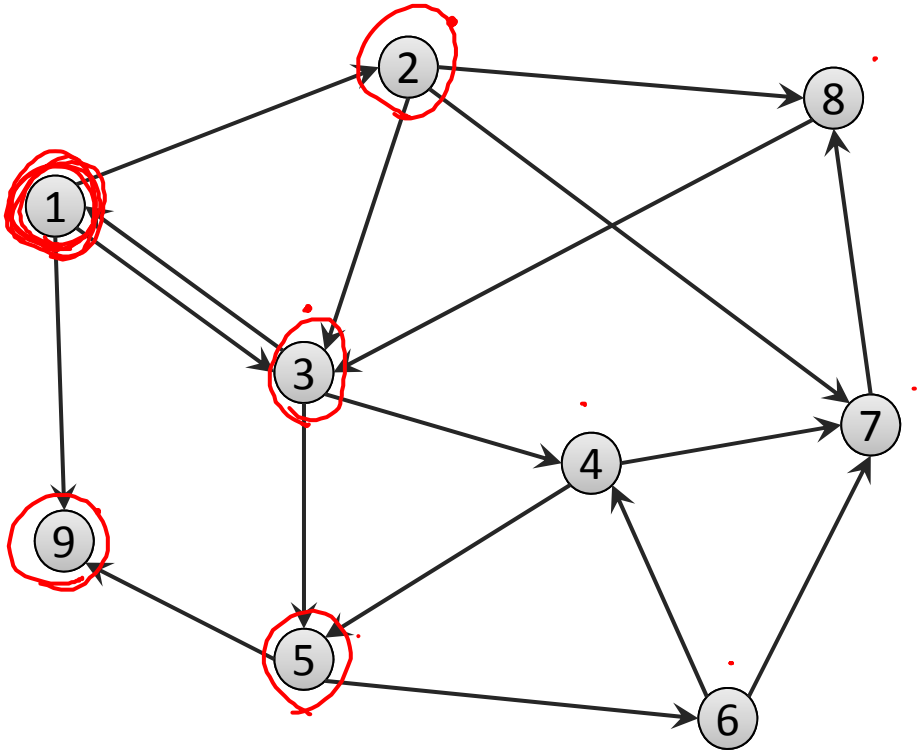
Breitensuche (BFS Traversierung)

UNI FREIBURG

- Am Anfang ist $v.\text{marked}$ bei allen Knoten v auf **false** gesetzt

```
BFS-Traversal:
    for all u in V: u.marked = false;
    Q = new Queue()
    root.marked = true
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                Q.enqueue(v)
```

Breitensuche Beispiel



besucht | Q

besucht	Q
1	9, 3, 2
9	3, 2
3	2, 5, 4
2	5, 4, 7, 8
5	4, 7, 8, 6
4	7, 8, 6
7	8, 6
8	6
6	

1	1, 2, 3, 9
2	3, 9, 7, 8
3	9, 7, 8, 5, 4
9	
⋮	

Bäume, Spannbäume

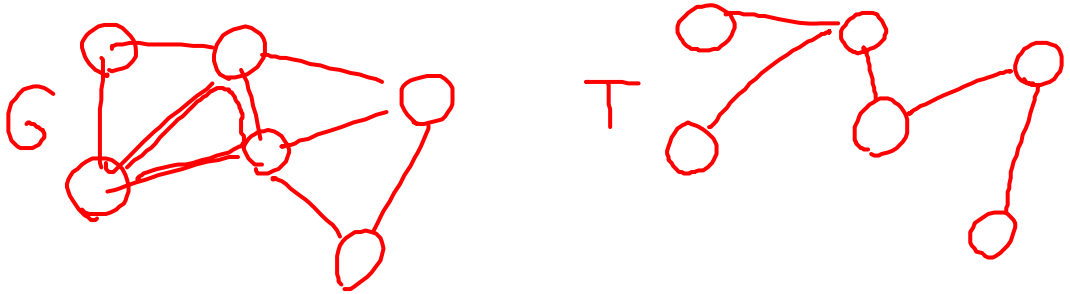
Baum:

- Ein zusammenhängender, ungerichteter Graph ohne Zyklen
  - bzw. auch ein gerichteter Graph, aber dann darf es auch ohne Berücksichtigug der Richtungen keine Zyklen haben

$|E| = |V| - 1$

Spannbaum eines Graphen G:

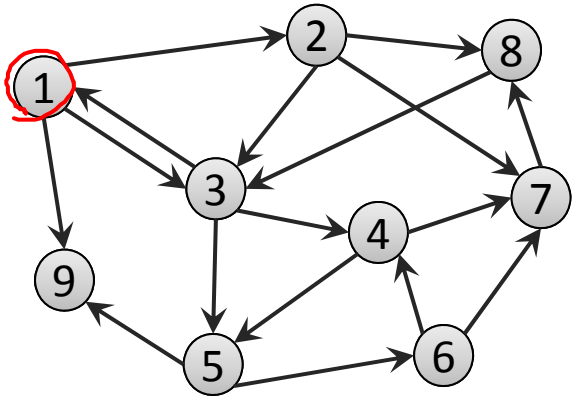
- Ein Teilgraph T, so dass T ein Baum ist, welcher alle Knoten von G enthält
  - Teilgraph: Teilmenge der Knoten und Kanten, welche einen Graph ergeben

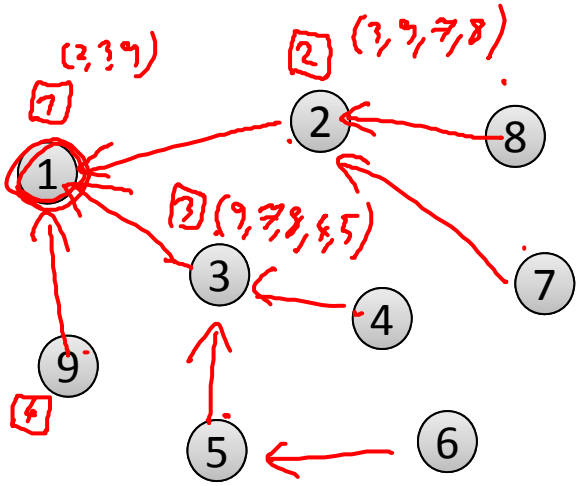


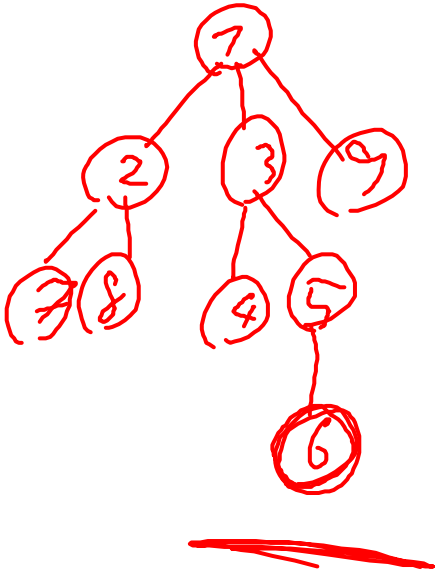
BFS Baum

Mit der BFS-Traversierung können wir folgendermaßen einen Spannbaum generieren (falls G zusammenhängend ist):

- Jeder Knoten u merkt sich, von welchem Knoten v aus er markiert wurde
- Der Knoten v ist dann der Parentknoten von u
  - Da jeder Knoten genau einmal markiert wird, ist der Parent von jedem Knoten eindeutig definiert, s ist die Wurzel und hat keinen Parent.







BFS Baum: Pseudocode

- Wir merken uns zusätzlich die Distanz zu s im Baum

```
BFS-Tree:
    Q = new Queue();
    for all u in V: u.marked = false;
    root.marked = true;
    root.parent = NULL;
    root.d = 0
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                v.parent = u;
                v.d = u.d + 1;
                Q.enqueue(v)
```

Analyse Breitensuche

In der Folge benennen wir die Knoten folgendermassen

- weiße Knoten: Knoten, welche der Alg. noch nicht gesehen hat
- graue Knoten: markierte Knoten
- schwarze Knoten: besuchte Knoten

Die Laufzeit der BFS-Traversierung ist $O(n)$. $n+m$)

Am Anfang sind alle Knoten weiß

Ein weißer Knoten wird grau wenn engequeued wird, ~~schwarz~~

und ein grauer wird schwarz beim degequeuen

Graue/schwarze Knoten werden nie weiß, schwarze nie grau

$\Rightarrow$ jeder Knoten wird maximal einmal en-/degequeued

Adjazenzlisten werden nur durchlaufen, wenn ein Knoten degequeued/schwarz wird $\Rightarrow O(m)$

$\Rightarrow$ jeder Eintrag in den Listen wird nur einmal abgefragt

$\Rightarrow O(n+m) = O(|V|+|E|)$ (bei Adjazenzlisten)

Analyse Breitensuche

UNI FREIBURG

Im BFS-Baum eines ungewichteten Graphen ist die Distanz von jedem Knoten u zur Wurzel s gleich $d_G(s,u)$.

Tiefensuche in allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Grundidee Tiefensuche in G (Start bei Knoten $s \in V$)

- **Markiere Knoten v** (am Anfang ist $v = s$)
- Besuche die Nachbarn von v der Reihe nach *rekursiv*
- Nachdem alle Nachbarn besucht sind, **besuche s**

- **rekursiv:** Beim Besuchen der Nachbarn werden deren Nachbarn besucht, und dabei deren Nachbarn, etc.
- **Zyklen in G:** Besuche jeweils nur Knoten, welche noch nicht markiert sind

- entspricht der Postorder-Traversierung in Bäumen
- Fall man gleich beim Markieren den Knoten besucht, entspricht es der Preorder-Traversierung

Tiefensuche: Pseusocode

```
DFS-Traversal:
    for all u in V: u.color = white;
    DFS-visit(root, NULL)

DFS-visit(u, p):
    u.color = gray;
    u.parent = p;
    for all v in u.neighbors do
      if v.color = white
        DFS-visit(v, u)
    visit node u;
    u.color = black;
```

Tiefensuche: Beispiel