Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 21 (29.7.2014)

String Matching (Textsuche) II

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Textsuche / String Matching

UNI FREIBURG

Gegeben:

- Zwei Zeichenketten (Strings)
- Text T (typischerweise lang)
- Muster P (engl. pattern, typischerweise kurz)

Ziel:

- Finde alle Vorkommen von P in T

Annahmen:

- Länge Text T : $\boldsymbol{n}$, Länge Muster P : $\boldsymbol{m}$

Beispiel:

- Text: dubadubadudadubidubadubidubiduda
- Pattern: dubidu

Naiver Algorithmus

```
TestPosition(s):          // tests if T[s, ..., s + m − 1] == P
    t := 0
    while t < m and T[s + t] = P[t] do
        t := t + 1
    return (t = m)
```

$O(n \cdot m)$

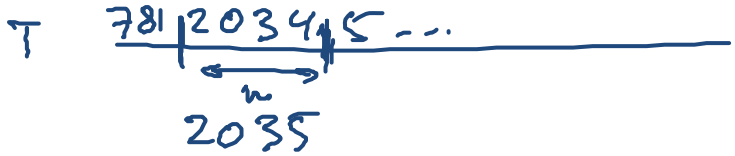
```
String-Matching:
    for s := 0 to n − m do
        if TestPosition(s) then
            report found match at position s
```

Rabin-Karp Algorithmus

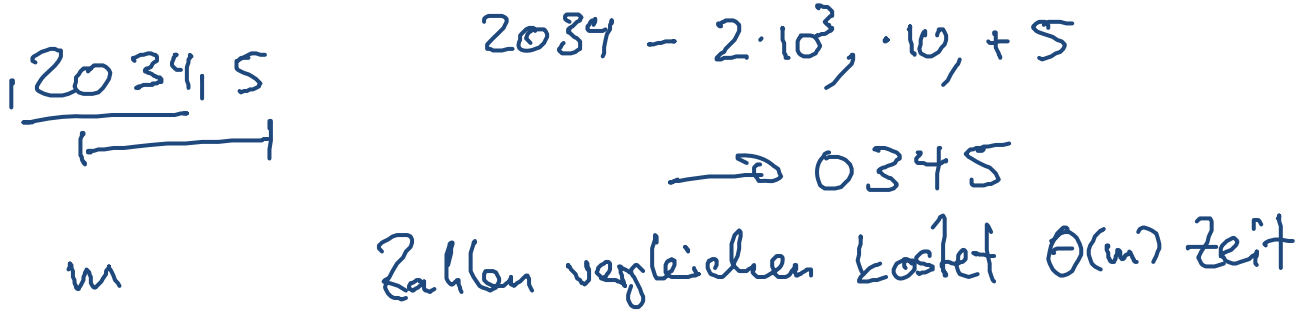
UNI FREIBURG

Grundidee

- Wir schieben wieder ein Fenster der Grösse m über den Text und schauen an jeder Stelle, ob das Muster passt



- Zur Einfachheit nehmen wir an, dass der Text nur aus den Ziffern $0, \ldots, 9$ besteht
  - dann können wir das Muster und das Fenster als Zahl verstehen
- Wenn wir das Fenster eins nach rechts schieben, kann die neue Zahl einfach aus der alten berechnet werden



Rabin-Karp Algorithmus

UNI FREIBURG

Lösung von Rabin und Karp:

- Wir rechnen alles mit den Zahlen modulo M
  - M sollte möglichst gross sein, allerdings klein genug, damit die Zahlen $0, \dots, M-1$ in einer Speicherzelle (z.B. 32 Bit) Platz haben
- Muster und Textfenster sind dann beides Zahlen aus dem Bereich $\{0, \dots, M-1\}$

($M=100$)

$2034 \bmod 100 = 34$

- Beim Schieben des Fensters um eine Stelle, lässt sich die neue Zahl wieder in $O(1)$ Zeit berechnen
  - Falls das nicht klar ist, siehe spätere Folie...
- Falls das Muster gefunden wird, sind die zwei Zahlen gleich, falls nicht, können sie trotzdem gleich sein
  - Falls die Zahlen gleich sind, dann überprüfen wir nochmals wie beim naiven Algorithmus Buchstabe für Buchstabe

Rabin-Karp Algorithmus: Pseudo-Code

Text $T[0 \ldots n-1]$, Muster $P[0 \ldots m-1]$, Basis b, Modulus M

$h := b^{m-1} \bmod M$

$p := 0;\ \ t := 0;$

for $i := 0$ **to** $m-1$ **do**

$\quad p := (p \cdot b + P[i]) \bmod M$ ← Zahl, welche das Muster repräsentiert

$\quad t := (t \cdot b + T[i]) \bmod M$ ← 1. Textfenster

$s := 0;$

while $s \leq n-m$ **do**

if $p = t$ **then**

TestPosition(s)

$t := \big((t - T[s] \cdot h) \cdot b + T[s+m]\big) \bmod M$

Fenster um 1 nach rechts schieben

Rabin-Karp Algorithmus: Laufzeit

Vorberechnung:

Im schlechtesten Fall:

- Der schlechteste Fall tritt ein, falls die Zahlen in jedem Schritt übereinstimmen. Dann muss man in jedem Schritt Buchstabe für Buchstabe überprüfen, ob man das Muster wirklich gefunden hat.
  - Sollte bei guter Wahl von M nicht allzu oft geschehen...
  - ausser, wenn das Muster tatsächlich sehr oft ($\Theta(n)$ mal) vorkommt...

Im besten Fall:

- Im besten Fall sind die Zahlen nur gleich, falls das Muster auch wirklich gefunden wird. Die Kosten sind dann $O(n + k \cdot m)$, falls das Muster im Text k Mal vorkommt.

Wahl der Parameter...

Zahlendarstellung und Wahl von M

- Wir hätten gerne, dass wenn $x \neq y$, dann ist $h(x) = h(y)$ "unwahrscheinlich" (für $h(x) := x \bmod M$)
- Nehmen wir an, dass die Buchstaben in Muster und Text als Ziffern zur Basis b dargestellt werden
  - in unserem Fall, haben wir $b = 10$
- Falls b und M einen gemeinsamen Teiler haben, ist $h(x) = h(y)$ trotz $x \neq y$ nicht so unwahrscheinlich

Extremfall: M ist ein Teiler von b $\quad 3 \cdot 10 \bmod 5 = 0$

Bsp: $b = 10, \quad M = 5$

Pattern $\alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \dots, \alpha_0 = \sum \alpha_i 10^i$

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \cdot 10^i\right) \bmod 5 = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_i \cdot 10^i \bmod 5) = \alpha_0 \bmod 5$$

0 für alle $i \neq 0$

Wahl der Parameter...

UNI FREIBURG

Zahlendarstellung und Wahl von M

- Wir hätten gerne, dass wenn $x \neq y$, dann ist $h(x) = h(y)$ "unwahrscheinlich" (für $h(x) := x \bmod M$)
- Nehmen wir an, dass die Buchstaben in Muster und Text als Ziffern zur Basis b dargestellt werden
  - in unserem Fall, haben wir $b = 10$
- Falls b und M einen gemeinsamen Teiler haben, ist $h(x) = h(y)$ trotz $x \neq y$ nicht so unwahrscheinlich

Wir wählen deshalb

- Die Basis b als genug grosse Primzahl
  - bei ASCII-Zeichen muss $b > 256$ sein
- M kann dann beliebig gewählt werden, am besten als Zweierpotenz
  - Zwischenresultate sind $< M \cdot b$, das sollte also in 32 (64) Bit Platz haben

Rechnen Modulo m

$$x \bmod M = y \iff \exists q \in \mathbb{Z}\colon\ y = x + q \cdot m \ \wedge\ y \in \{0, \dots, M-1\}$$

- $x \bmod M$: addiere/subtrahiere M von x bis die Zahl im Bereich $\{0, \dots, M-1\}$ ist

Rechenregeln:

$$(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$$
$$(a + b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$$

Rechnen Modulo m

$$x \bmod M = y \iff \exists q \in \mathbb{Z}\colon\ y = x + q \cdot m \ \wedge\ y \in \{0, \dots, M-1\}$$

- $x \bmod M$: addiere/subtrahiere M von x bis die Zahl im Bereich $\{0, \dots, M-1\}$ ist

Rechenregeln:

$$(a \cdot b) \bmod m = \big((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big) \bmod m$$
$$(a + b) \bmod m = \big((a \bmod m) + (b \bmod m)\big) \bmod m$$

Schieben des Fensters:

- Fenster von Stelle s nach Stelle $s+1$ schieben

$$t := \big((t - T[s] \cdot h) \cdot b + T[s+m]\big) \bmod M$$

$h = b^{m-1} \bmod M$

Rechnen Modulo m

$$x \bmod M = y \iff \exists q \in \mathbb{Z}\colon\ y = x + q \cdot M \ \wedge\ y \in \{0, \dots, M-1\}$$

Negative Zahlen

- Damit ist $x \bmod M$ immer im Bereich $\{0, \dots, M-1\}$

  Beispiele:

  $$24 \bmod 10 = 4, \qquad 4 \bmod 10 = 4, \qquad -4 \bmod 10 = 6$$

- **Aber:** In Java / C++ / Python ist $(-x) \,\%\, m = -(x \,\%\, m)$

  Beispiele:

  $$24 \,\%\, 10 = 4, \qquad 4 \,\%\, 10 = 4, \qquad -4 \,\%\, 10 = -4$$

- **Workaround:** Falls das Resultat von $x \,\%\, m$ negativ ist, einfach m dazuaddieren, dann kommt man in den richtigen Bereich

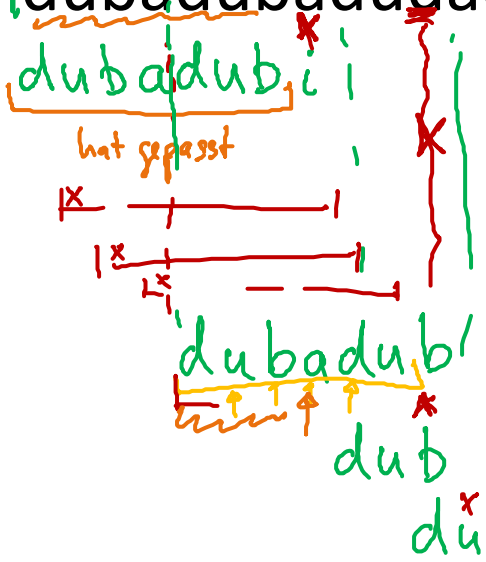
Algorithmus von Knuth, Morris, Pratt

- Kann wir das Problem immer in Zeit $O(n)$ lösen?
  - im schlechtesten Fall...

Schauen wir uns nochmals ein Beispiel an:

- Pattern: dubadubi

  Text: dubadubadudadubidubadubidubiduda

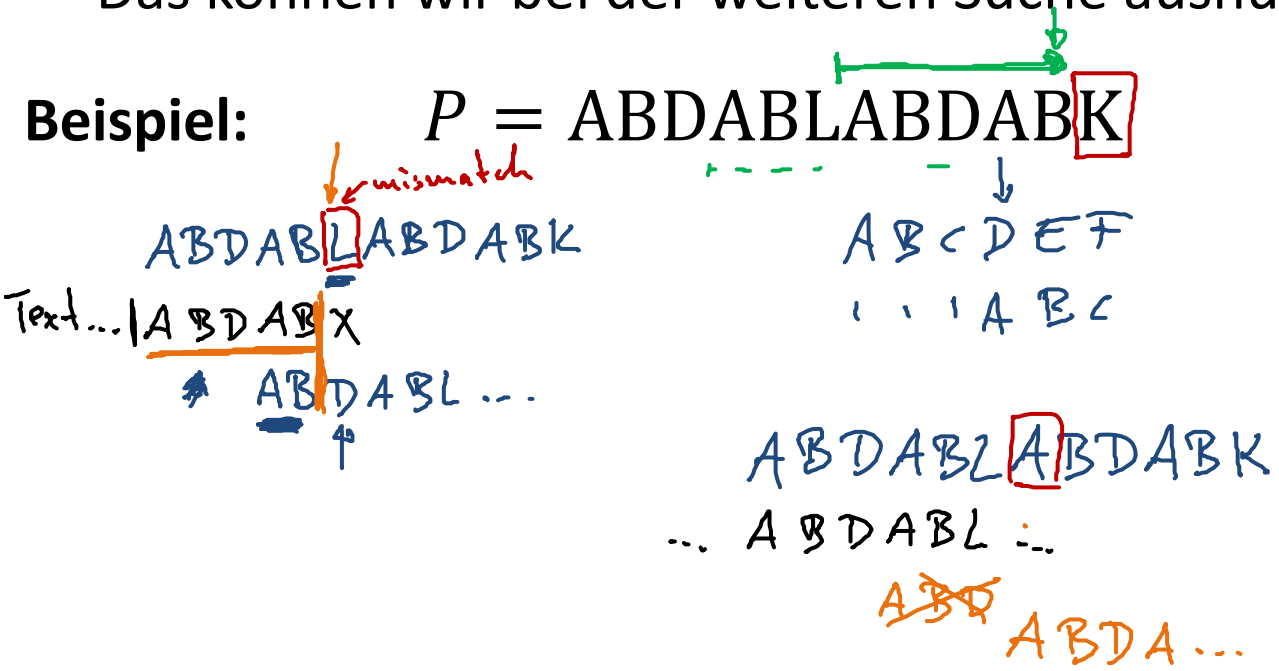


Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Idee:

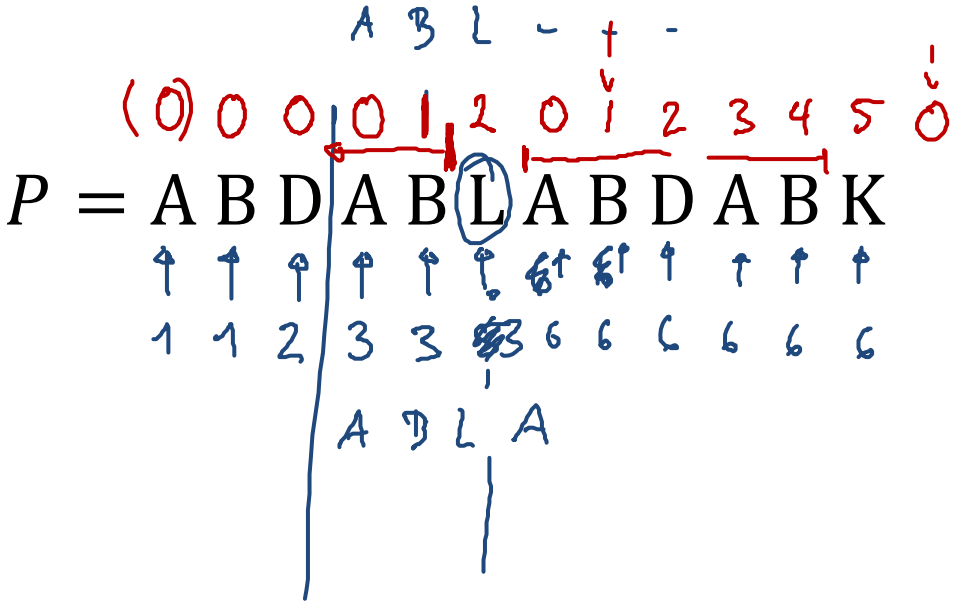
- Falls wir beim Testen des Musters P an Stelle t feststellen, dass $P[t]$ nicht mit dem Text an der entsprechenden Stelle übereinstimmt, dann wissen wir, dass die Stellen $P[0 \ldots t-1]$ übereingestimmt haben.
- Das können wir bei der weiteren Suche ausnutzen

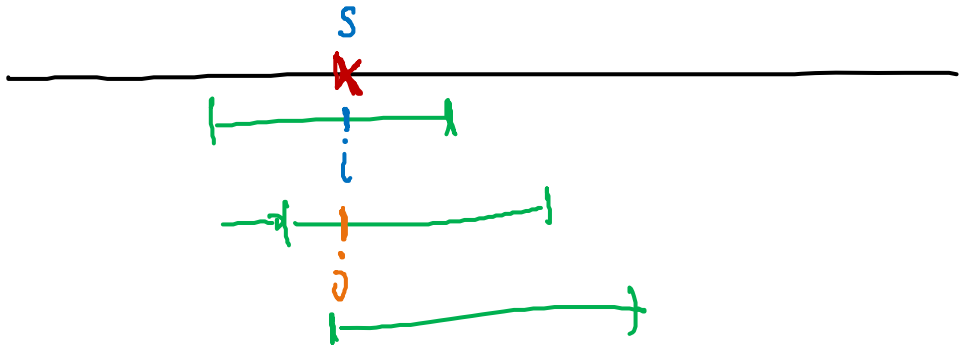
Beispiel: $P = \text{ABDABLABDABK}$



Knuth-Morris-Pratt Alg.: Initialisierung

- Wir merken uns an jeder Stelle des Musters, wie weit wir das Suchfenster bei einem “Mismatch” weiterschieben können.





Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Vorberechnung: Array S der Länge $m+1$

- $S[i]$: Stelle in P, an welcher man die neue Suche beginnt, falls beim Testen der Stelle i im Pattern ein Mismatch auftritt
- $S[0] = -1, \quad S[1] = 0$
- $S[m]$: Stelle in P, an welcher man weitersucht, nachdem P erfolgreich gefunden wurde

Beispiel:

$P =$ [A, B, D, A, B, L, A, B, D, A, B, D]

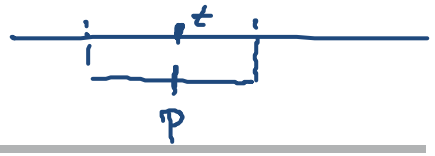
$S =$ [-1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 3]

A B D A B ...

A B D ...

S hängt nur von P ab

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus



$t := 0;\ p := 0$ // t: Position in Text, p: Position im Pattern

while $t < n$ **do**

  if $T[t] = P[p]$ **then** // characters match

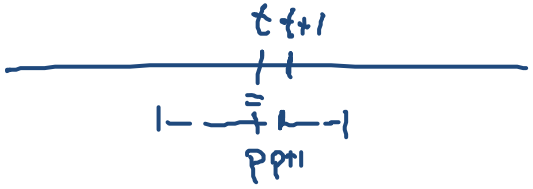
    if $p = m - 1$ **then** // pattern found

      pattern found at position $t - m + 1$

      $p := S[m];\ t := t + 1$

    else

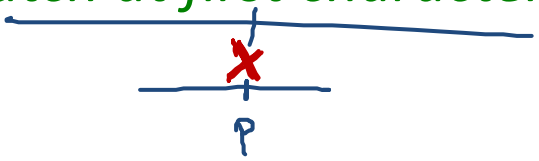
      $p := p + 1;\ t := t + 1$



  else // characters don't match

    if $p = 0$ **then** // mismatch at first character

      $t := t + 1$

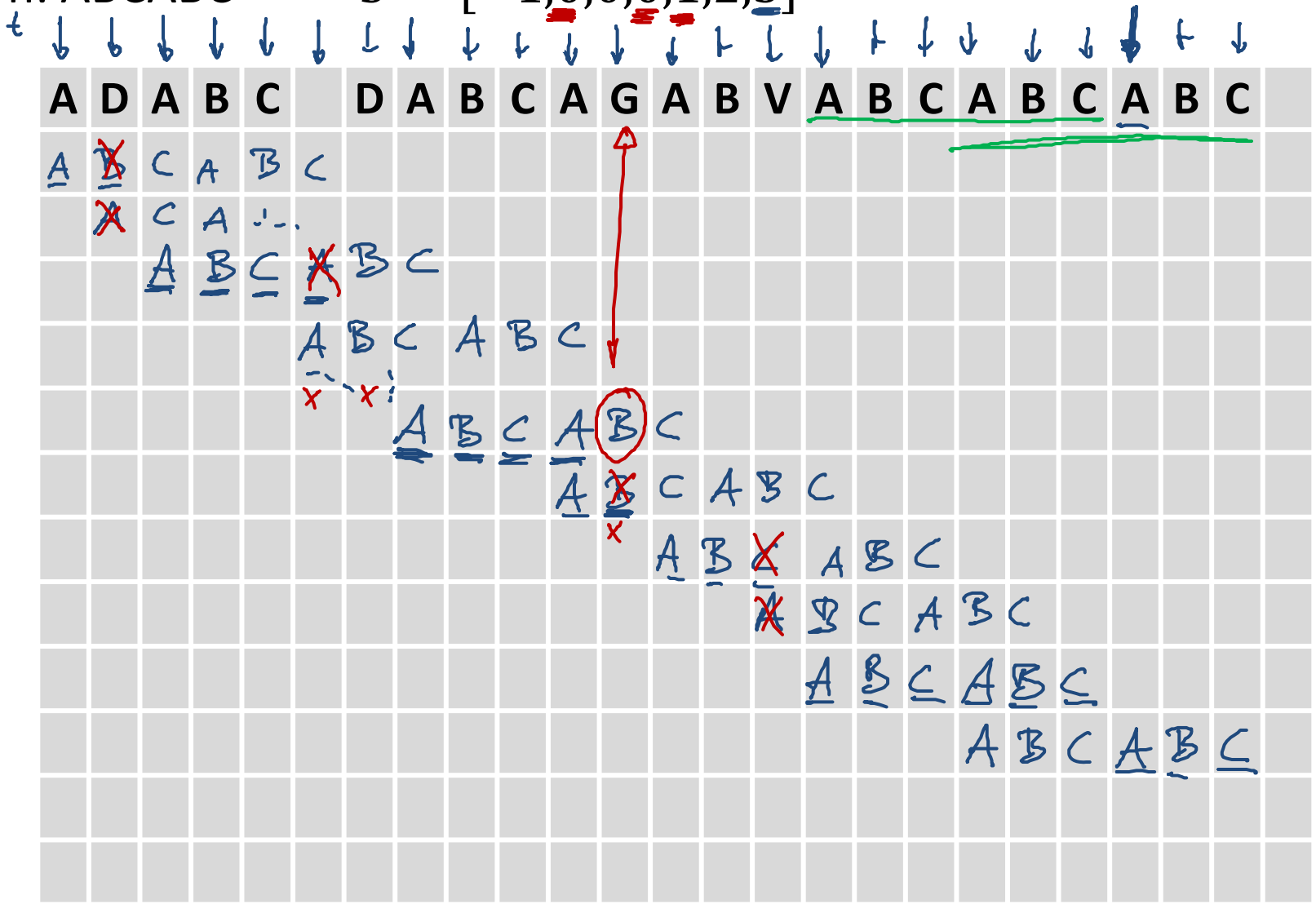


    else

      $p := S[p]$

Knuth-Morris-Pratt Alg.: Beispiel

Pattern: ABCABC $\quad S = [-1,0,0,0,1,2,3]$



Knuth-Morris-Pratt Alg.: Laufzeit

Laufzeit ohne Initialisierung des Arrays S:

```
t := 0;  p := 0
while t < n do
    if T[t] = P[p] then
        if p = m − 1 then
            pattern found
            p := S[m];  t := t + 1
        else
            p := p + 1;  t := t + 1
    else
        if p = 0 then
            t := t + 1
        else
            p := S[p]
```

$S[p] < p$

$\Rightarrow \leq 2n$ Schleifendurchläufe

$\leq n$ mal

Laufzeit: $O(n)$

kann auch $\leq n$ mal vorkommen

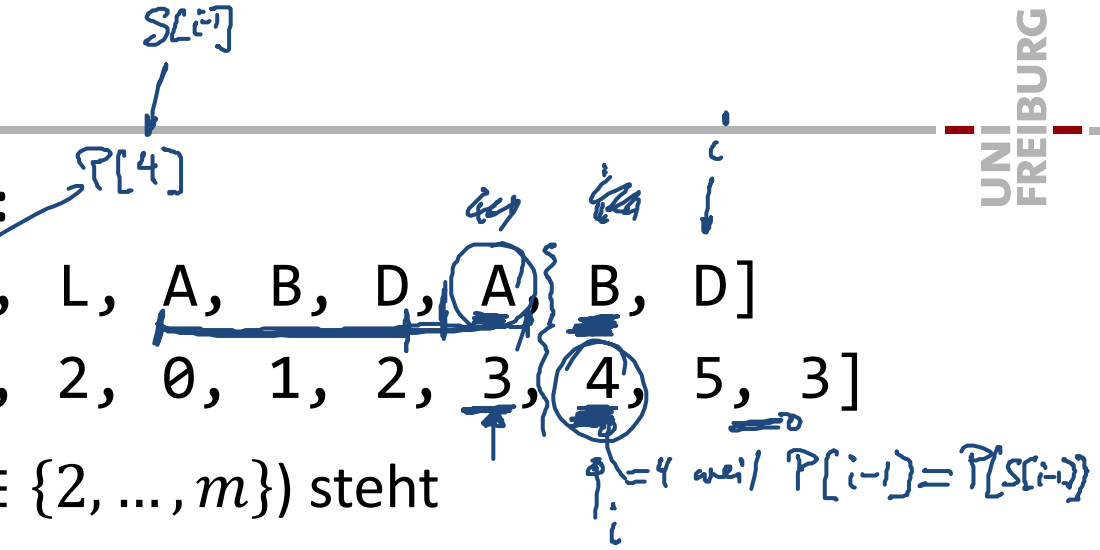
Fenster wird geschoben (nach rechts)

Initialisierung

Vorberechnung von Array S:

- $P = [$ A, B, D, A, B, L, A, B, D, A, B, D$]$

  $S = [$-1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 3$]$



- An Position in $S[i]$ (für $i \in \{2, \dots, m\}$) steht

$$S[i] := \max_{k<i} \{P[i-k \dots i-1] = P[0 \dots k-1]\}$$

- $S[i]$: Länge des längsten echten Teilstückes von $P[0 \dots i-1]$, welches an Stelle $i-1$ endet, und welches auch Anfangsstück von P ist

Berechnung von $S[i]$:

- Falls $P[S[i-1]] = P[i-1]$, dann ist $S[i] = S[i-1] + 1$
- Sonst testen, ob es einen kürzeres, passendes Anfangsstück gibt
  - Wir werden gleich anschauen, wie man das macht...

Berechnung von $S[i]$: Beispiel

$h := S[i-1]$ $\quad i \geq 2 \quad S[0]=-1,\ S[1]=0$

```
while h ≥ 0 do
    if P[i − 1] = P[h] then
        S[i] := h + 1;  h := −2
    else
        h := S[h]
if h = −1 then S[i] = 0
```

$i=4$ $i=5$ $\qquad i=12$

Beispiel: $P = [A, B, D, A, B, L, A, B, D, A, B, D, X]$

$S = [-1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$

$i=2$: $P[1] \overset{?}{=} P[0]$ ("B" = "A"), $h = S[0] = -1$

$i=4$: $h = S[3] = 0$; if $P[3] = P[0]$ ("A" = "A"), $S[4] = 0+1 = 1$

$i=5$: $h = S[4] = 1$; if $P[4] = P[1]$ ("B" = "B"), $S[5] = 2$

$i=12$: $h = S[11] = 5$; $P[11] = P[5]$ ("D" ≠ "L"); $h = S[5] = 2$; $P[11] = P[2]$ ("D" = "D") $\Rightarrow S[12] = 2+1 = 3$

Berechnung von $S[i]$: Laufzeit

```
h := S[i − 1]
while h ≥ 0 do
    if P[i − 1] = P[h] then
        S[i] := h + 1;  h := −1
    else
        h := S[h]
if h = −1 then S[i] = 0
```

Beobachtung:

$$S[i] \leq S[i-1] + 1$$

Falls $S[i] = S[i-1] + 1$: 1 Schleifendurchlauf

Falls $S[i] < S[i-1]$:

- Wert von h nimmt in jedem Schleifendurchlauf ab
- Am Schluss ist $S[i] = h + 1$
- Anzahl Schleifendurchläufe $\leq \Delta h + 1 = S[i-1] - S[i] + 2$

$S[i-1] - (S[i]-1)$

Berechnung von $S[i]$: Laufzeit

Falls $S[i] = S[i-1] + 1$:

- Anzahl Schleifendurchläufe $= 1 = S[i-1] - S[i] + 2$

Falls $S[i] < S[i-1]$:

- Anzahl Schleifendurchläufe $\leq \Delta h + 1 = S[i-1] - S[i] + 2$

Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{i=2}^{m} (S[i-1] - S[i] + 2) = (m-1) \cdot 2 + (S[1] - S[2] + S[2] - S[3] + \dots$$

$$= (m-1) \cdot 2 + \underbrace{S[1]}_{\geq 0} - \underbrace{S[m]}_{\geq 0}$$

$$\leq 2(m-1)$$

Knuth-Morris-Pratt Alg.: Zusammenfassung

UNI FREIBURG

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus:

- Berechnet zuerst in Zeit $O(m)$ das Array S der Länge m
  - hängt nur vom Pattern P ab
  - beschreibt an jeder Position im Pattern, wo (im Pattern) man bei einem Mismatch weitersuchen muss
- Mit Hilfe von S werden dann alle Vorkommen von P in T in Zeit $O(n)$ gefunden
  - In jedem Schritt kann man entweder die aktuelle Suchposition in T oder die Position des Suchfensters in T um mindestens 1 nach rechts verschieben

Gesamtlaufzeit: $\boldsymbol{O(m+n) = O(n)}$