Albert-Ludwigs-Universität, Inst. für Informatik
Prof. Dr. Fabian Kuhn
Y. Maus, O. Saukh 10 Juni, 2016

Algorithmen und Datenstrukturen
Sommersemester 2016
Übungsblatt 8

Abgabe bis 12:00, Freitag, 24 Juni, 2016

Achtung: Bitte fügen Sie Ihrer Lösung eine (kurze) Datei *erfahrungen.txt* mit Ihren Erfahrungen mit dem jeweiligen Aufgabenblatt hinzu. Das Forum können (und sollen) Sie nicht nur für Fragen zur Übung, sondern auch für Fragen zur Vorlesung benutzen.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein gewichteter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{N}$. Dabei seien die Kantengewichte eindeutig, d.h., $w(e) \neq w(e')$ für $e \neq e'$.
Zeigen Sie, dass man einen MST von G erhält, wenn man parallel aus allen Kreisen (mit mindestens drei Kanten) die Kante mit dem größten Gewicht entfernt. Formal ausgedrückt betrachte die folgenden Mengen

$$\mathcal{C} := \{C \mid C \text{ ist Menge von Kanten eines Kreises von } G\} \text{ und} \tag{1}$$
$$M := \{e \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ und } e = \texttt{argmax}_{e' \in C} w(e')\}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $T = (V, E \setminus M)$ ein MST von G ist.

Aufgabe 2 (1+3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass ein minimaler Spannbaum in Allgemeinen in ungerichteten gewichteten Graphen nicht eindeutig ist.

b) Beweisen Sie, dass der minimale Spannbaum eines ungerichteten gewichteten Graphen eindeutig ist, wenn alle Kantengewichte verschieden sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Finden Sie einen Algorithmus, der einen Spannbaum findet, welcher das Produkt seiner Kantengewichte minimiert und beweisen Sie ggf. unter Zuhilfenahme bekannter Theoreme die Korrektheit des Algorithmus'.
Hinweis: Logarithmen könnten bei dieser Aufgabe helfen.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass leicht angepasste Greedyalgorithmen für Probleme, die dem MST-Problem sehr ähnlich zu sein scheinen, nicht immer funktionieren. In beiden Aufgaben sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{N}$.

a) Gesucht ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kanten, so dass $G = (V, M)$ stark zusammenhängend ist und M minimales Gewicht unter allen solchen Teilmengen hat. Ein Graph ist stark zusammenhängend, wenn es zwischen allen Paaren von Punkten einen gerichteten Pfad gibt. Zeigen, sie, dass die folgende Anpassung von Kruskals Algorithmus das Problem nicht löst.

$M := \emptyset, \;\; C := E$
while $C \neq \emptyset$ **do**
  $C := \{(u, v) \in E | (u, v) \notin M, \text{ in } M \text{ existiert kein gerichteter Pfad von } u \text{ nach } v\}$.
  Füge zu M die Kante aus C mit dem kleinsten Gewicht hinzu.
end

Der Algorithmus nimmt also eine Kante (u, v) zur bestehenden Menge hinzu, wenn noch kein gerichteter Pfad von u nach v existiert. Dabei geht der Algorithmus nach dem Greedy-Prinzip vor, d.h., er nimmt immer diejenige solcher Kanten, die das kleinste Gewicht hat.

b) Gesucht ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kanten, so dass $G = (V, M)$ maximal kreisfrei (gerichtet) ist und M minimales Gewicht unter allen solchen Teilmengen hat. (V, M) ist maximal kreisfrei (gerichtet), wenn $(V, M \cup \{e\}$ für jedes $e \in E \setminus M$ einen gerichteten Kreis entählt. Zeigen, sie, dass die folgende Anpassung von Kruskals Algorithmus das Problem nicht löst.

$M := \emptyset, \;\; C := E$
while $C \neq \emptyset$ **do**
  $C := \{e \in E | e \notin M, \;\; M \cup \{e\} \text{ enthält keinen gerichteten Kreis.}\}$.
  Füge zu M die Kante aus C mit dem kleinsten Gewicht hinzu.
end

Der Algorithmus nimmt also eine Kante zur bestehenden Menge hinzu, wenn sie zusammen mit der bestehenden Menge keinen Kreis schließt. Dabei geht der Algorithmus nach dem Greedy-Prinzip vor, d.h., er nimmt immer diejenige solcher Kanten, die das kleinste Gewicht hat.