Informatik II - SS 2014

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 2 (22.4.2016)

Sortieren II

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

SelectionSort: Programm

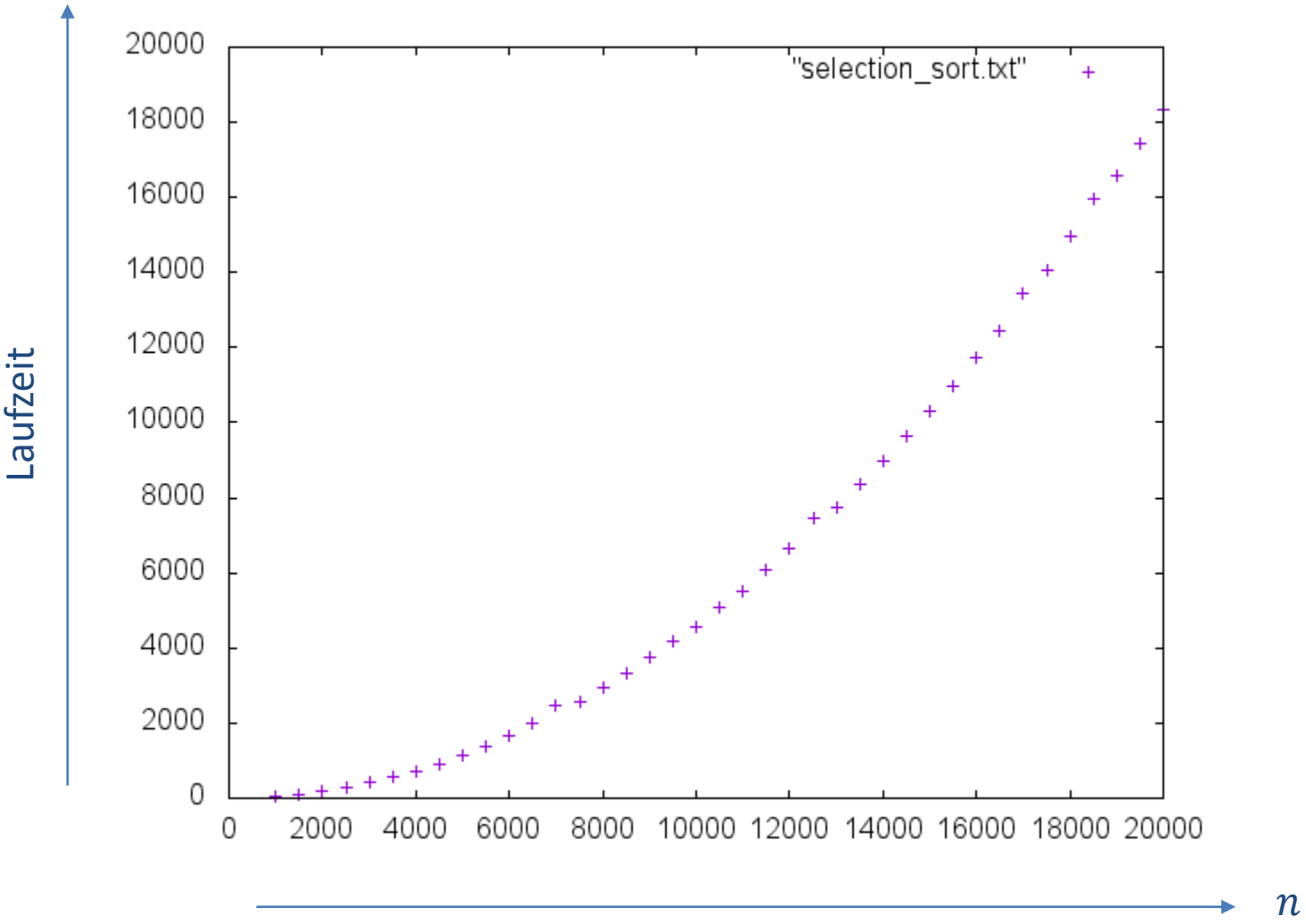
UNI FREIBURG

Schreiben wir doch das gleich mal als Java/C++ - Programm um…

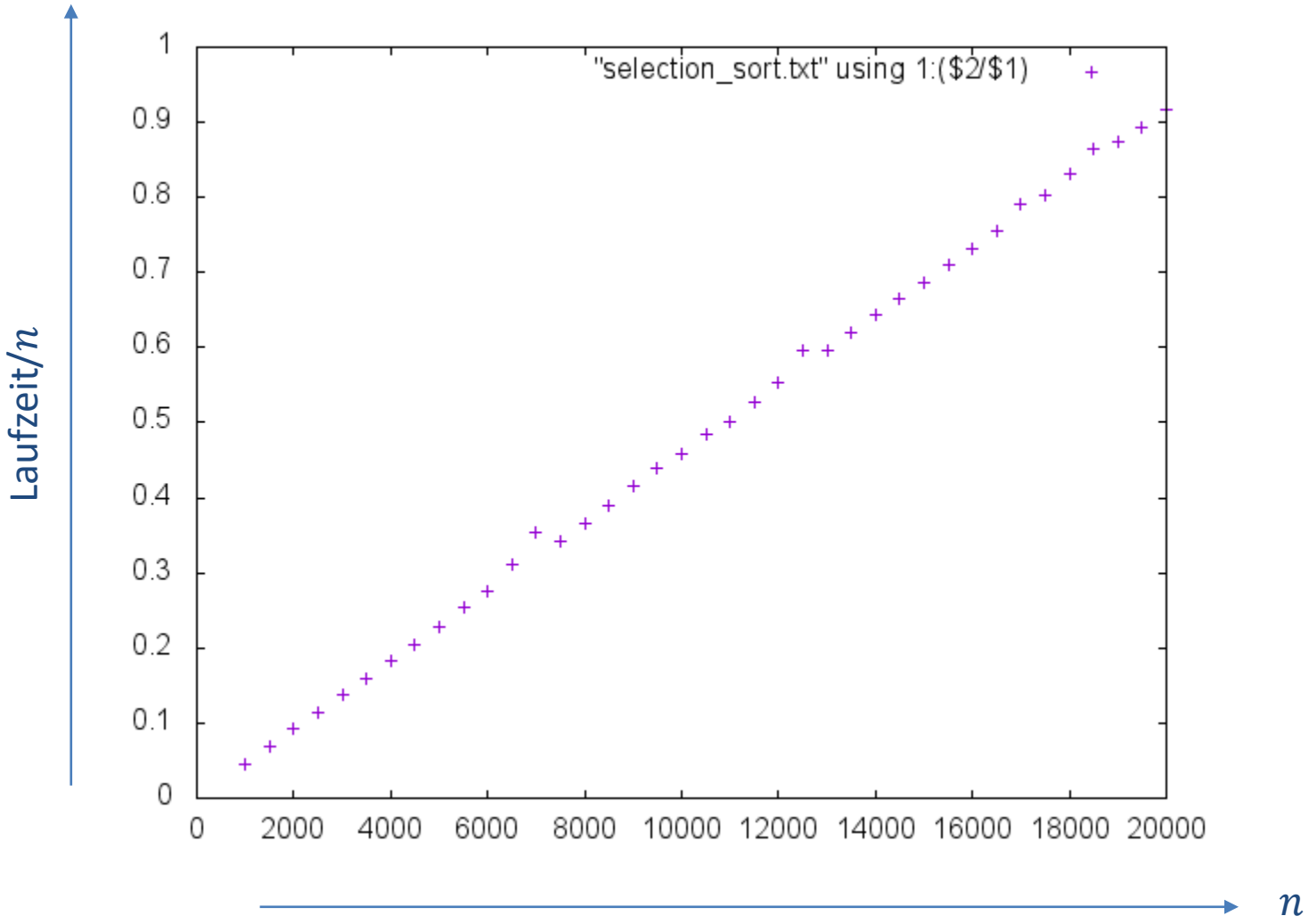
Dabei kann ich auch die Umgebung für die Übungen demonstrieren:

- **Unit Tests** : junit / gtest
- **Coding Standards** : checkstyle / cpplint
- **Build-Framework** : ant / make
- **Build-System** : jenkins
- **File-Repository** : SVN

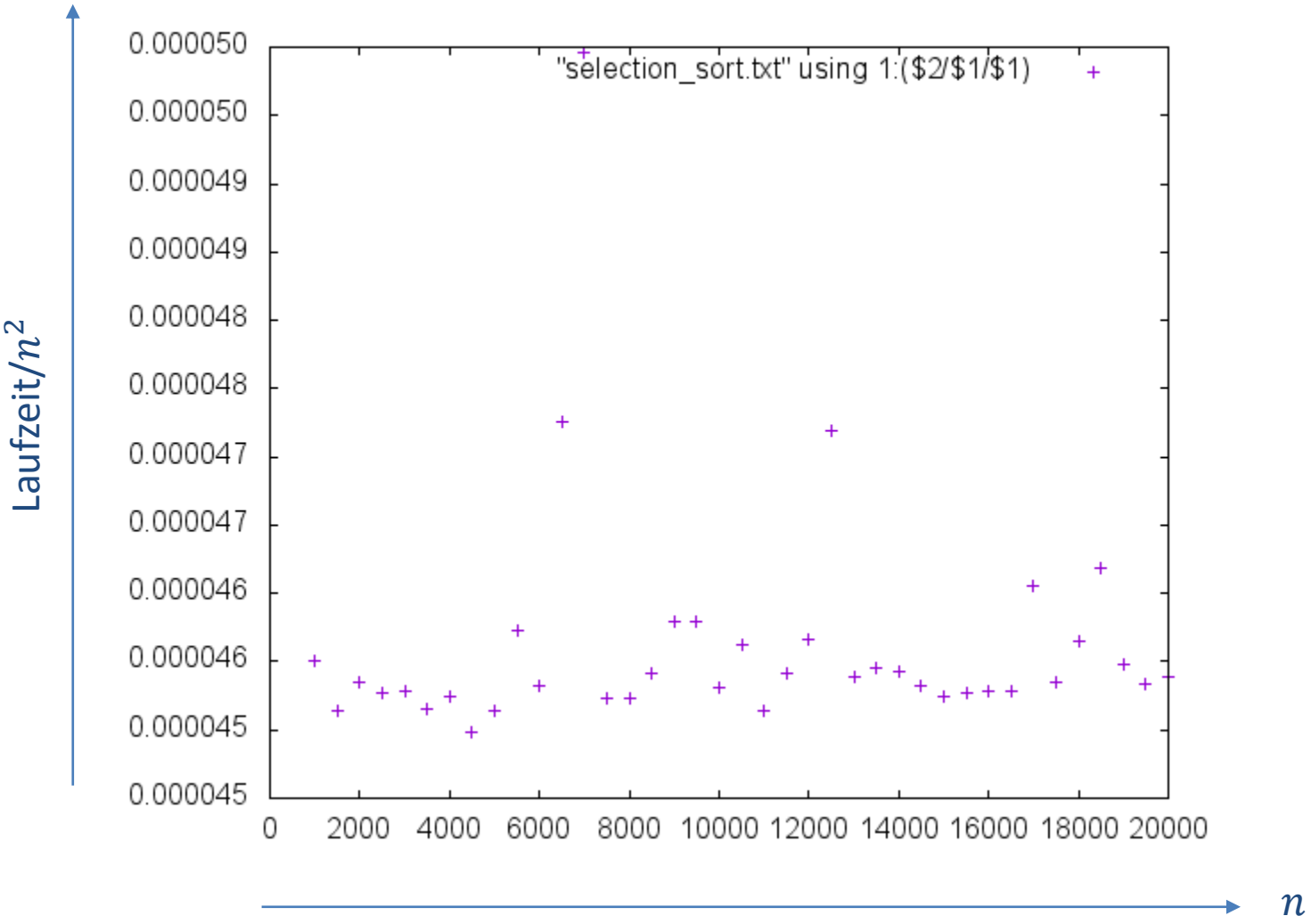
Zeitmessung SelectionSort



Zeitmessung SelectionSort



Zeitmessung SelectionSort



Beobachtungen Selection Sort

UNI FREIBURG

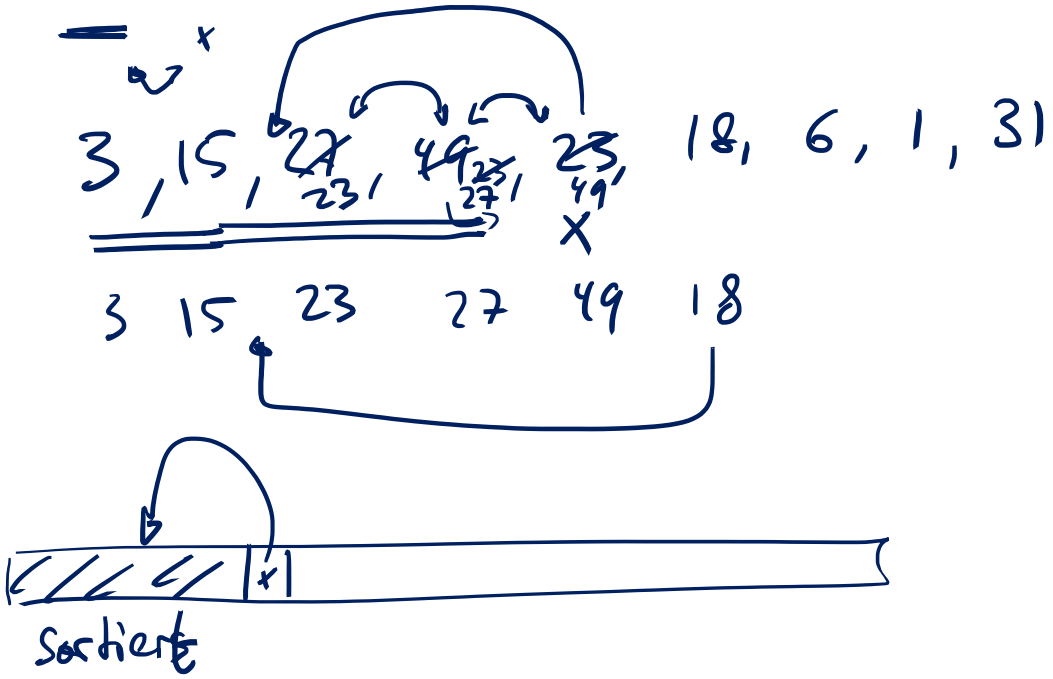
Zeitmessung Selection Sort:

- Scheint mit wachsender Grösse des Arrays unverhältnismässig langsamer zu werden
- Die Zeit scheint etwa quadratisch mit der Grösse des Arrays zu wachsen
  - doppelt so grosses Array → 4 x so lange Laufzeit
  - dreimal so grosses Array → 9 x so lange Laufzeit
  - …
- Wir werden sehen, dass die Laufzeit tatsächlich quadratisch ist
  - und wie man das formal korrekt analysiert und ausdrückt
- Zuerst überlegen wir, wie man sonst noch sortieren kann...

Insertion Sort - Idee

- Anfang (Präfix) des Arrays ist sortiert
  - Am Anfang nur das erste Element, mit der Zeit mehr...
- Füge schrittweise immer das nächste Element in den bereits sortierten Teil ein.

Beispiel: $A = [15,\ 3,\ 27,\ 49,\ 23,\ 18,\ 6,\ 1,\ 31]$



Insertion Sort: Pseudocode

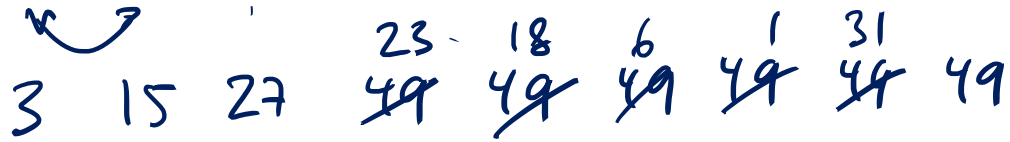
Eingabe: Array A der Grösse n

```
InsertionSort(A):
 1: for i=0 to n-2 do
 2:   // prefix A[0..i] is already sorted
 3:   pos = i+1
 4:   while (pos > 0) and (A[pos] < A[pos-1]) do
 5:     swap(A[pos], A[pos-1])
 6:     pos = pos - 1
```

Bubble Sort

- Gehe durch's Array, vertausche benachbarte Elemente, falls sie in der falschen Reihenfolge sind
- Wiederhole bis das Array sortiert ist...

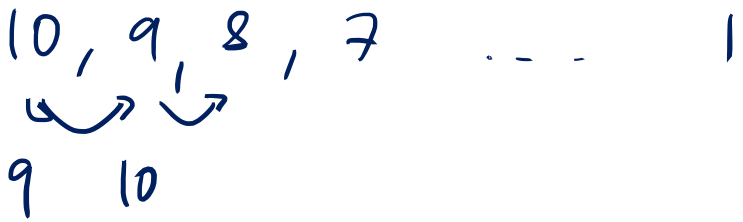
Beispiel: $A = [15,\ 3,\ 27,\ 49,\ 23,\ 18,\ 6,\ 1,\ 31]$



Bubble Sort: Pseudocode

Eingabe: Array A der Grösse n

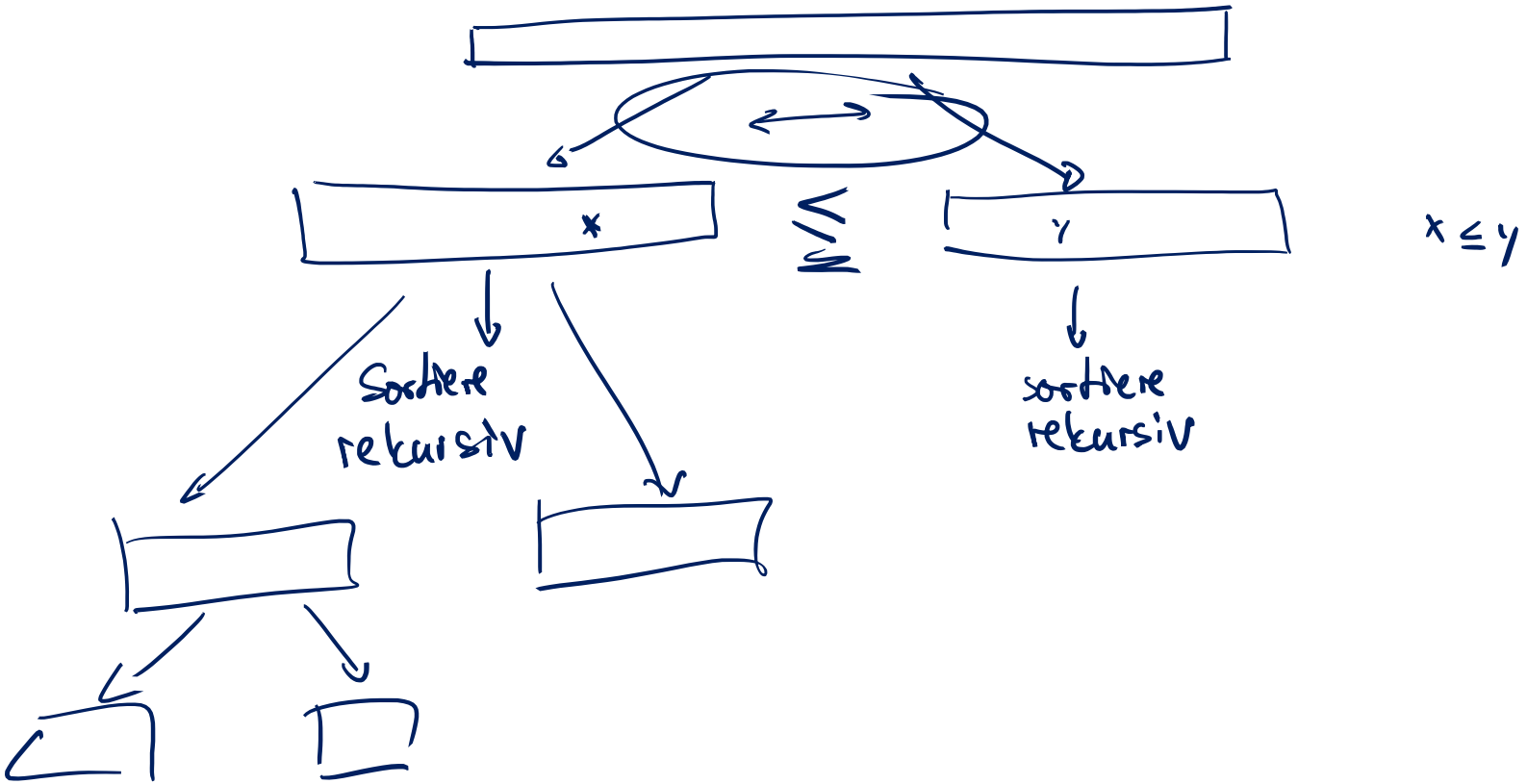
```
BubbleSort(A):
 1: for i=0 to n-2 do          // need to repeat n-1 times
 3:   for j=0 to n-1 do
 4:     if (A[j] > A[j+1]) then
 5:       swap(A[j], A[j+1])
```



- Wir werden sehen: Insertion Sort und Bubble Sort sind auch nicht besser als Selection Sort …

QuickSort : Idee

1. Teile Array in zwei Teile auf
   - linker Teil: kleine Elemente, rechter Teil: grosse Elemente
2. Sortiere die beiden Teile rekursiv!



QuickSort Algorithmus

Informelle Beschreibung:

1. Teile Array in linken und rechten Teil, so dass

$$\textbf{Elemente links} \leq \textbf{Elemente rechts}$$

   – Bemerkung: Die Elemente in beiden Teilen müssen noch nicht sortiert sein

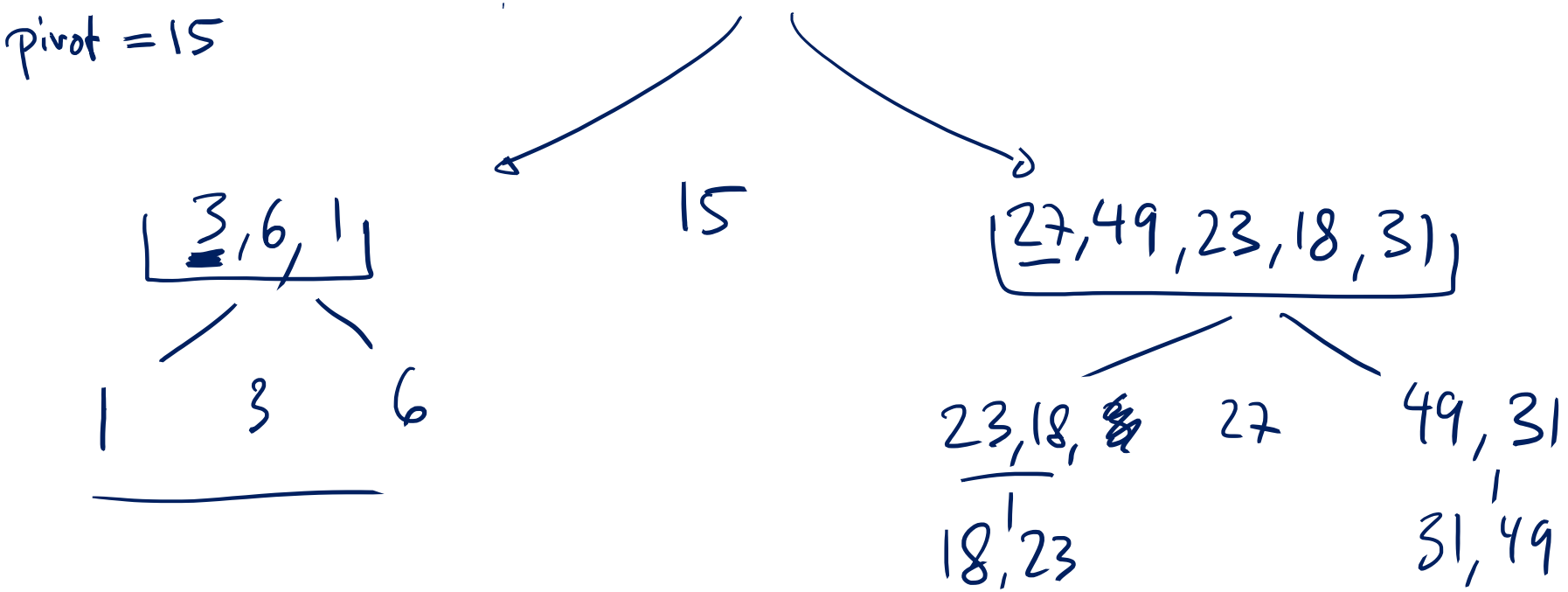
2. a) Sortiere die Elemente im linken Teil **rekursiv**
   b) Sortiere die Elemente im rechten Teil **rekursiv**

   – Rekursion: "löse ein kleineres Teilproblem der gleichen Art mit der gleichen Methode wie das Hauptproblem"

- Sobald die Teilprobleme so klein werden, dass Sortieren trivial wird, endet die Rekursion
  – spätestens wenn die Teile nur noch aus einem Element bestehen

QuickSort : Beispiel

Beispiel: $A = [15,\ 3,\ 27,\ 49,\ 23,\ 18,\ 6,\ 1,\ 31]$

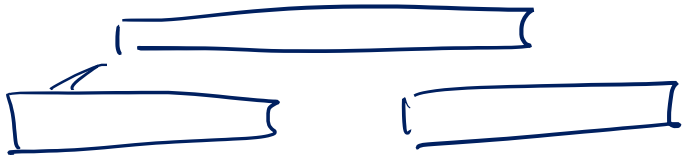


QuickSort : Aufteilen des Arrays

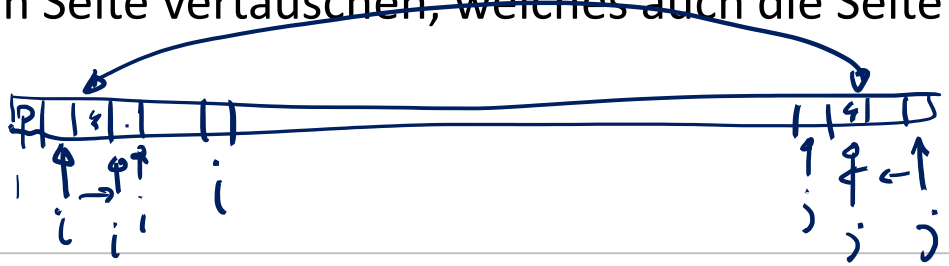
- Wir müssen so aufteilen, dass

  $$\text{Elemente im linken Teil} \leq \text{Elemente im rechten Teil}$$

- **Idee:** Wähle ein **Pivot x**, welches bestimmt wo die Mitte ist
  - Elemente $< x$ müssen nach links
  - Elemente $> x$ müssen nach rechts
  - Bei Elementen $= x$ ist's egal…



- **Algorithmus für Divide** (oft auch Partition genannt)**:**
  - Idee: Iteriere von links und von rechts über's Array
  - Wenn man ein Element trifft, das auf der richtigen Seite ist, muss man nichts tun und kann weiter gehen.
  - Bei einem Element, welches die Seite wechseln muss, kann man mit einem Element auf der anderen Seite vertauschen, welches auch die Seite wechselen muss.



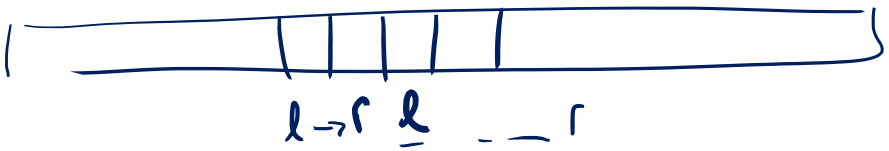
QuickSort : Aufteilen des Arrays

Algorithmus für Divide (etwas formaler)**:**

- Aufgabe: Divide array A der Länge n anhand von Pivot x
  - Annahme: Elem. $\leq x$ gehen nach links, elem. $> x$ gehen nach rechts

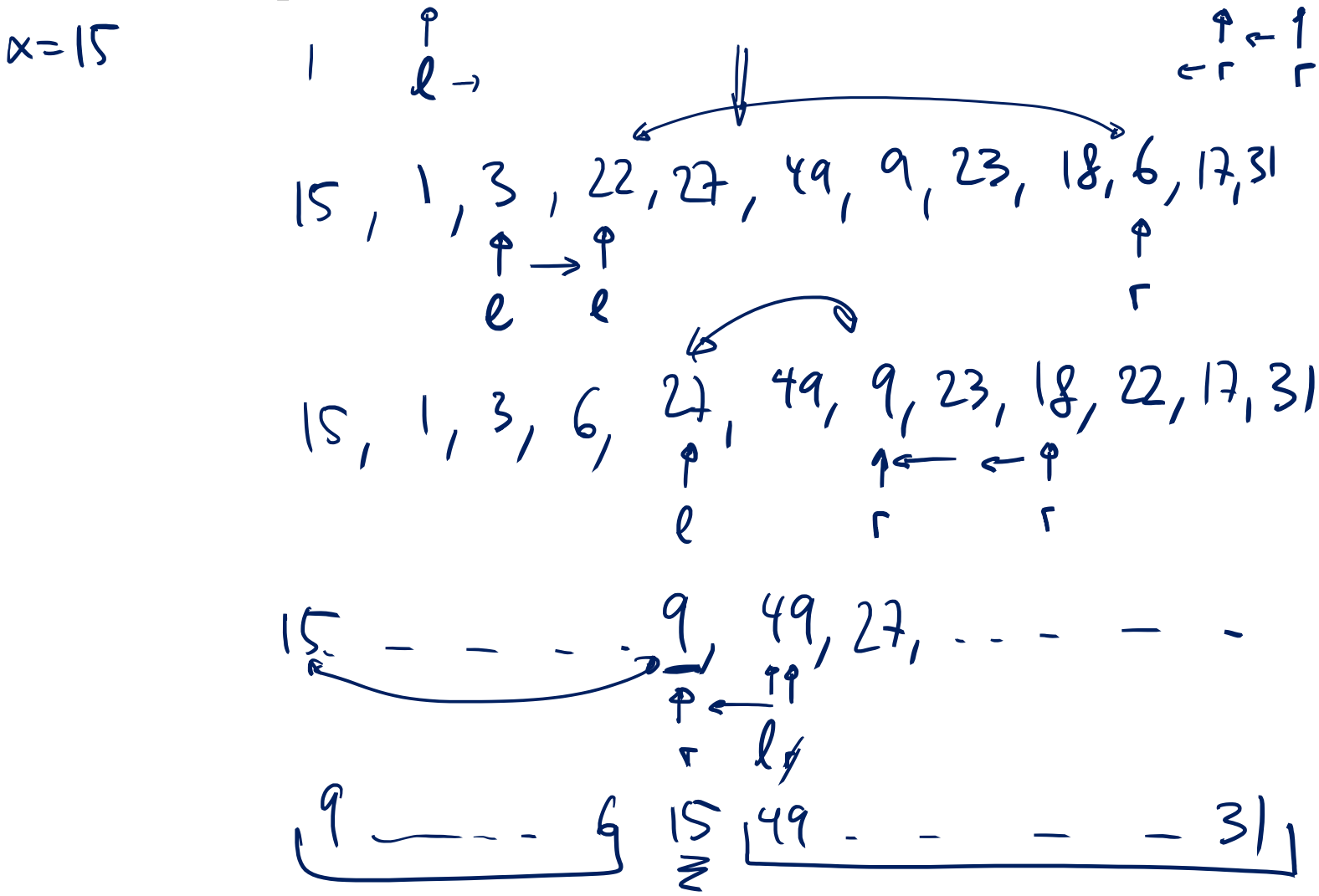
- Generelles Vorgehen:
  - Zwei Variablen l und r, um von links und rechts durch's Array zu gehen
  - Inkrementiere l bis $A[l] > x$ (Element muss nach rechts)
  - Dekrementiere r bis $A[r] \leq x$ (Element muss nach links)
  - Vertausche, und stelle l und r eins vor ($l \mathrel{+}= 1$, $r \mathrel{-}= 1$)
  - Divide fertig, sobald sich l und r treffen

- Die Details müssen Sie in der Übung selbst ausarbeiten…

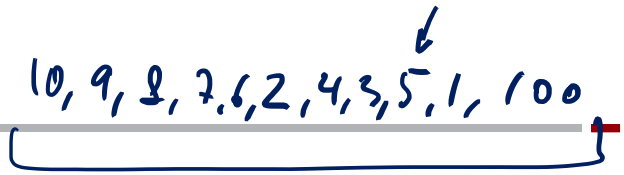


QuickSort Divide : Beispiel

Beispiel: $A = [15,\ 17,\ 3,\ 22,\ 27,\ 49,\ 9,\ 23,\ 18,\ 6,\ 1,\ 31]$



QuickSort : Wahl des Pivots



- Wie gross die zwei Teile beim Divide werden, hängt von der Wahl des Pivots ab…
- Wir werden sehen: Der Algorithmus ist am schnellsten, wenn die zwei Teile möglichst gleich gross sind.

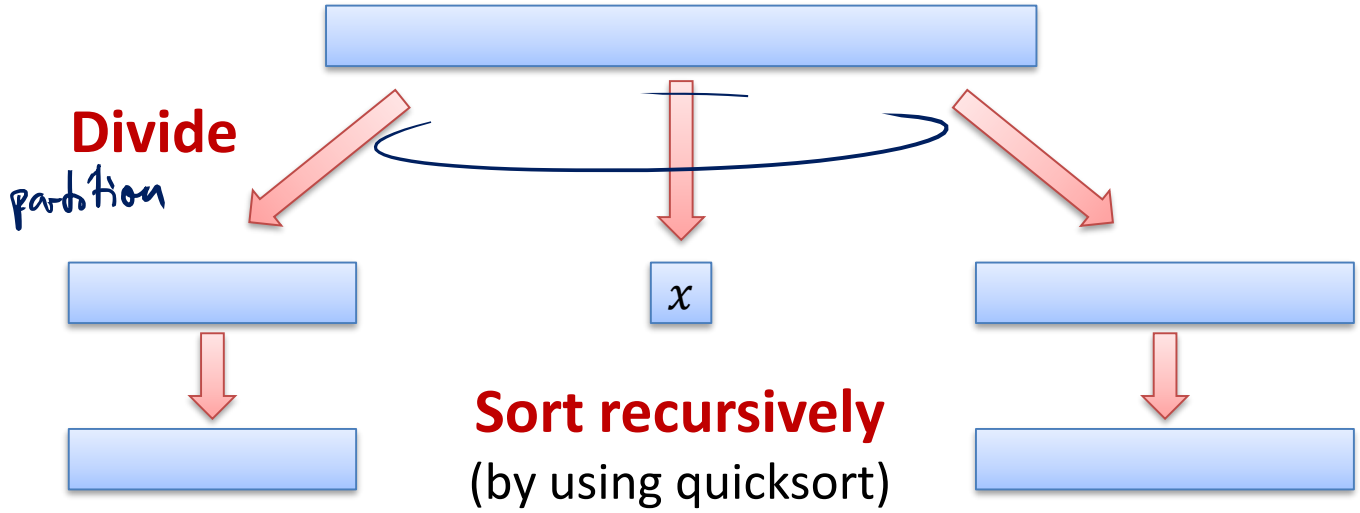
Strategien zur Bestimmung des Pivots:

- Ideal wäre der Median → kann nicht einfach gefunden werden…
  - werden wir noch anschauen...
- Ein fixes Element des Arrays (z.B. immer das erste des Bereichs)
  - kann zu sehr ungleichen Teilen führen...
- Ein Element an einer zufälligen Position (innerhalb des Bereichs)
  - Randomized QuickSort meint meistens genau das
  - Wird meistens vernünftig grosse Teile liefern

- Median von drei (oder mehr) zufälligen Elementen
  - etwas “teurer”, dafür werden die Teile “gleicher”

Divide and Conquer

Übersicht QuickSort:



Divide and Conquer:

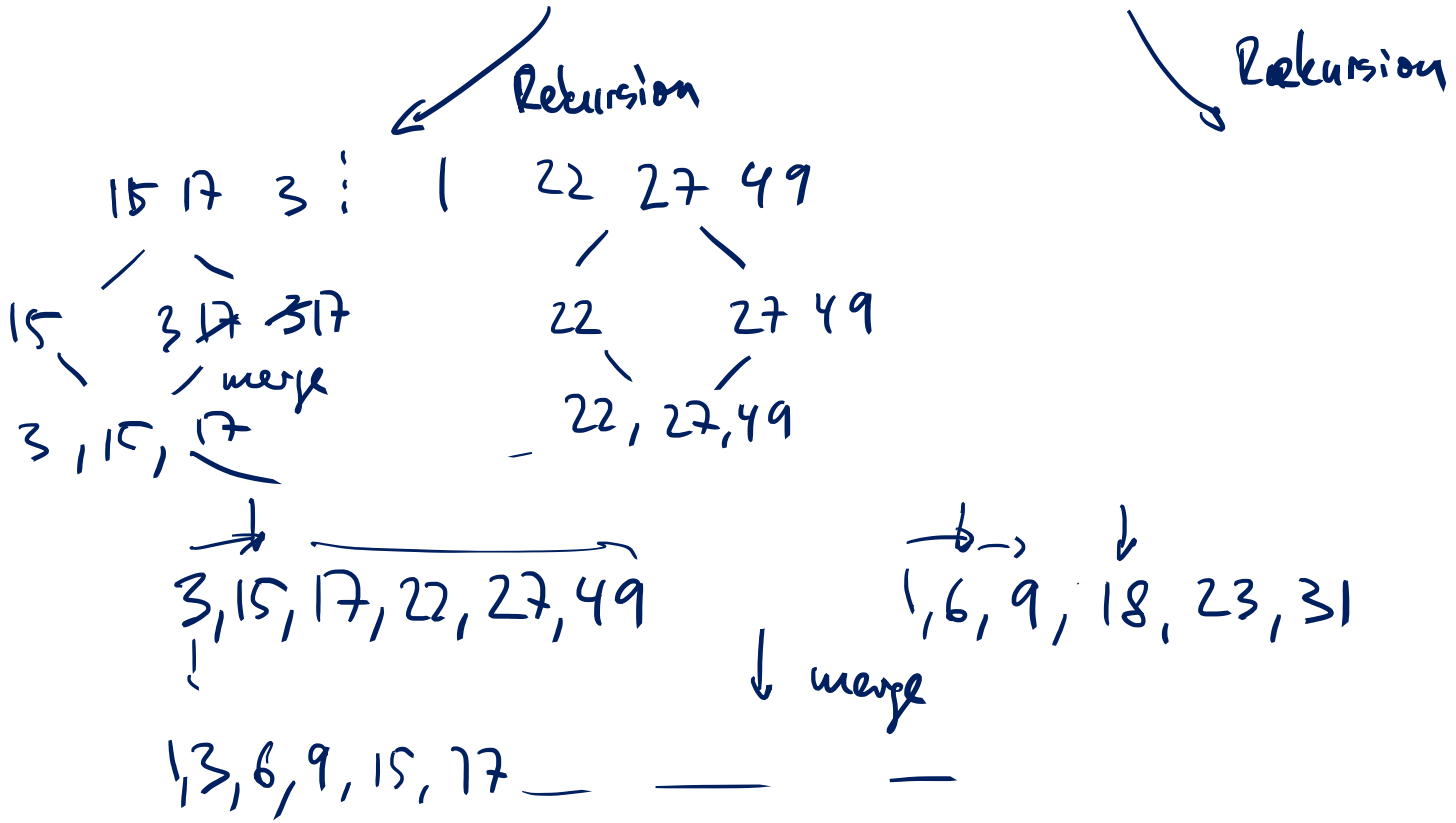
- Verbreitetes Prinzip für den Algorithmenentwurf

1. Teile Eingabe in 2 oder mehrere kleinere Teilprobleme
2. Löse die Teilprobleme rekursiv
3. Kombiniere die Teillösungen zur Gesamtlösung ← bei Quicksort trivial

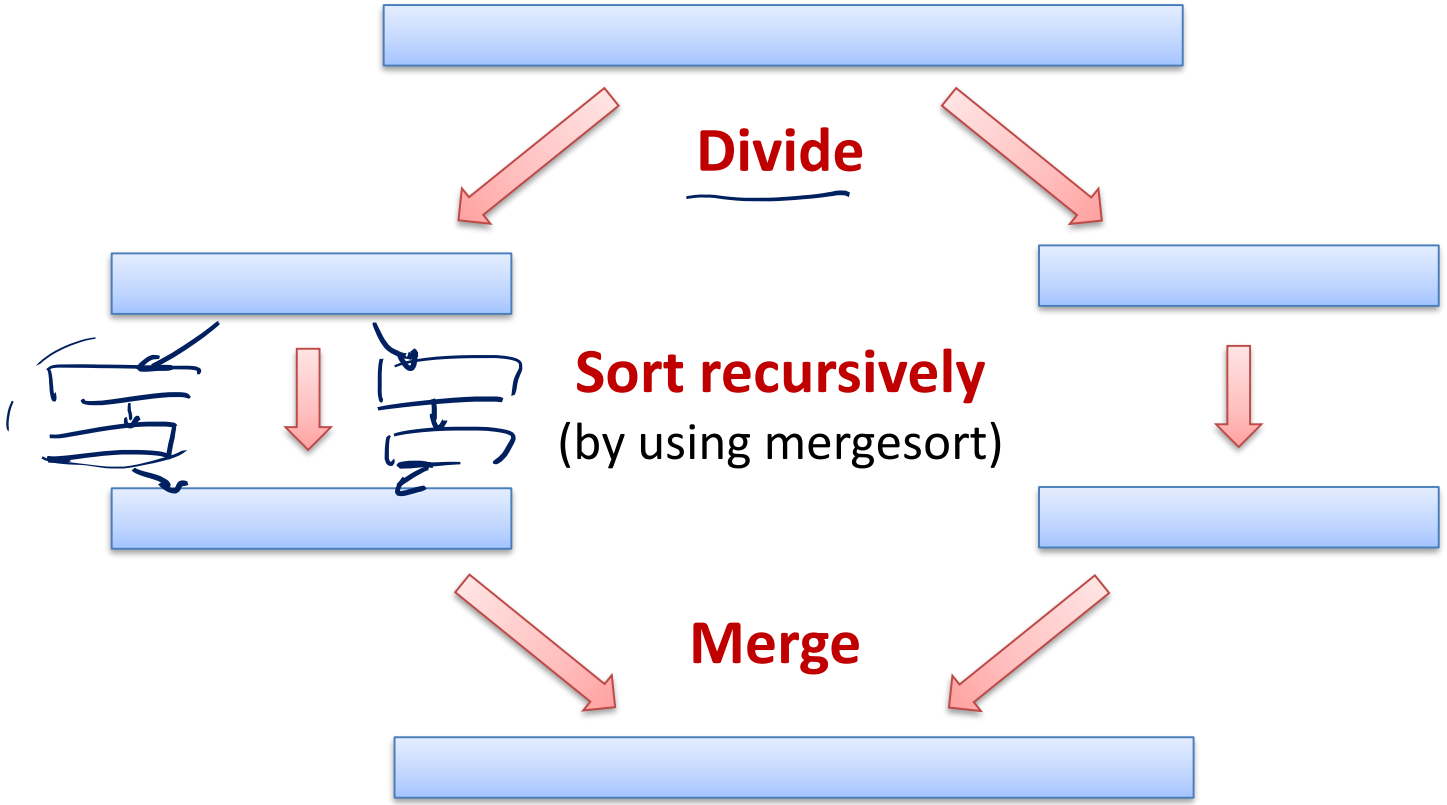
MergeSort

- Ein weiterer Sortieralgorithmus, welcher auf dem Divide-and-Conquer Prinzip basiert

Beispiel: $A = [15,\ 17,\ 3,\ 22,\ 27,\ 49,\ 9,\ 23,\ 18,\ 6,\ 1,\ 31]$



Übersicht MergeSort



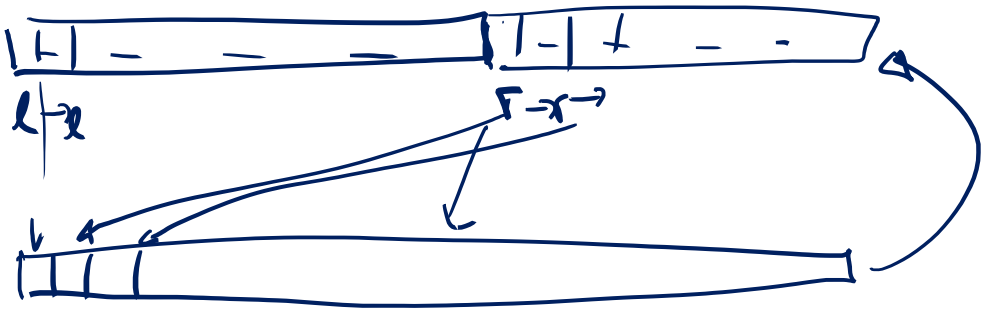
- Divide ist bei MergeSort trivial
- Merge (kombinieren der Lösungen) benötigt dafür Arbeit...

MergeSort: Merge-Schritt

Verschmelzen (merge) von zwei sortierten Arrays:

- Gegeben: sortierte Arrays A und B der Länge n und m
- Ausgabe: sortiertes Array C mit den Elementen von A und B

Vorgehen:



MergeSort: Pseudocode

Eingabe: Array A der Grösse n

```
MergeSort(A):
 1: allocate array tmp to store intermediate results
 2: MergeSortRecursive(A, 0, n, tmp)

MergeSortRecursive(A, start, end, tmp)          // sort A[start..end-1]
 1: if end – start > 1 then
 2:   middle = start + (end – start) / 2        // int. division
 3:   MergeSortRecursive(A, start, middle, tmp)
 4:   MergeSortRecursive(A, middle, end, tmp)
 5:   pos = start; i = start; j = middle
 6:   while pos < end do
 7:     if i < middle and (j = end or A[i] < A[j]) then
 8:       tmp[pos] = A[i]; pos++; i++
 9:     else
10:       tmp[pos] = A[j]; pos++; j++
11:   for i = start to end-1 do A[i] = tmp[i]
```