Informatik II - SS 2016

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 8 (13.5.2016)

Hashtabellen I

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Dictionary mit sortiertem Array

Laufzeiten:

create: $O(1)$

insert: $O(n)$

find: $O(\log n)$

delete: $O(n)$

Können wir alle Operationen schnell machen?

- und das *find* noch schneller?

Direkte Adressierung

Mit einem Array können wir alles schnell machen,

...falls das Array gross genug ist.

Annahme: Schlüssel sind ganze Zahlen zwischen 0 und $M-1$

0	None
1	None
2	**Value 1**
3	None
4	None
5	None
6	**Yannic**
7	**Value 3**
8	None
⋮	⋮
$M-1$	None

find(2) → "Value 1"

insert(6, "Yannic")

delete(4)

Direkte Adressierung : Probleme

UNI FREIBURG

1. Direkte Adressierung benötigt zu viel Platz!

- Falls Schlüssel ein beliebiger *int* (32 bit) sein kann:

  Wir benötigen ein Array der Grösse $2^{32} \approx 4 \cdot 10^9$.

  Bei 64 bit Integers sind's sogar schon mehr als 10^{19}…

2. Was tun, wenn die Schlüssel keine ganzen Zahlen sind?

- Wo kommt das *(key,value)*-Paar *("Alex", "Assistent")* hin?
- Wo soll der Schlüssel 3.14159 gespeichert werden?
- Pythagoras: "Alles ist Zahl"

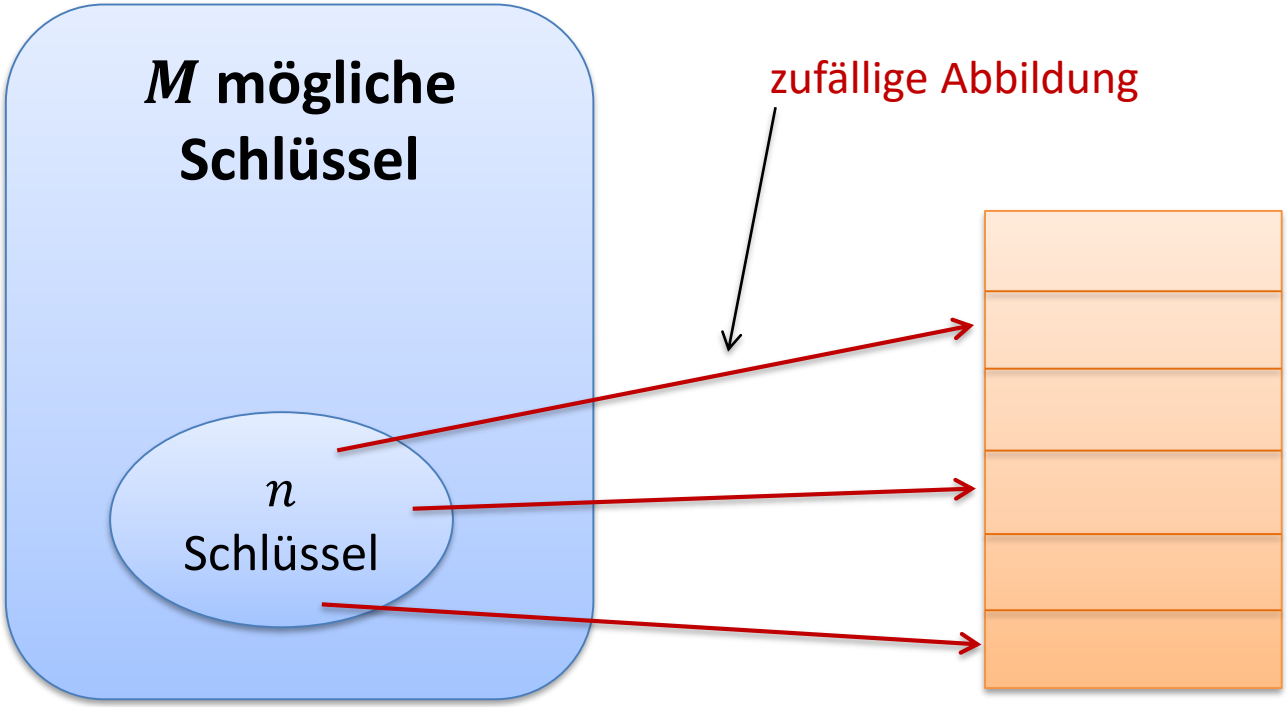
  "Alles" kann als Folge von Bits abgespeichert werden:
  Interpretiere Bit-Folge als ganze Zahl

- **Verschärft das Platz-Problem noch zusätzlich!**

Hashing : Idee

Problem

- Riesiger Raum S an möglichen Schlüsseln
- Anzahl n der wirklich benutzten Schlüssel ist **viel** kleiner
  - Wir möchten nur Arrays der Grösse $\approx n$ (resp. $O(n)$) verwenden…
- Wie können wir M Schlüssel auf $O(n)$ Array-Positionen abbilden?



Hashfunktionen

UNI FREIBURG

Schlüsselraum S, $|S| = M$ (alle möglichen Schlüssel)

Arraygrösse m ($\approx$ Anz. Schlüssel, welche wir max. speichern wollen)

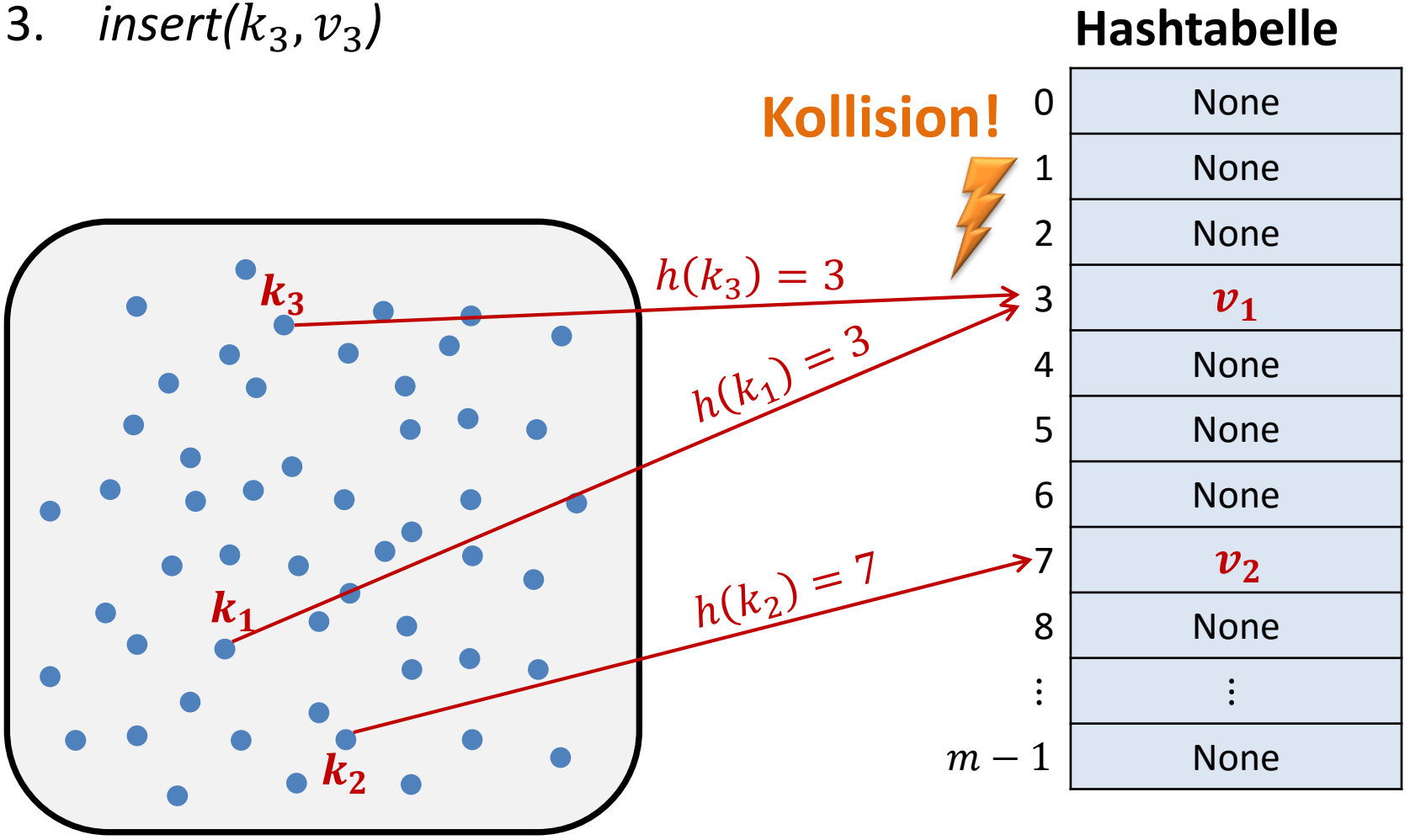
Hashfunktion

$$h: S \to \{0, \dots, m-1\}$$

- Bildet Schlüssel vom Schlüsselraum S in Arraypositionen ab
- h sollte möglichst nahe bei einer zufälligen Funktion sein
  - alle Elemente in $\{0, \dots, m-1\}$ etwa gleich vielen Schlüsseln zugewiesen sein
  - ähnliche Schlüssel sollten auf verschiedene Positionen abgebildet
- h sollte möglichst schnell berechnet werden können
  - Wenn möglich in Zeit $O(1)$
  - Wir betrachten es im folgenden als Grundoperation (Kosten = 1)

Funktionsweise Hashtabellen

1. $insert(k_1, v_1)$
2. $insert(k_2, v_2)$
3. $insert(k_3, v_3)$



Hashtabellen : Kollisionen

UNI FREIBURG

Kollision:

Zwei Schlüssel k_1, k_2 kollidieren, falls $h(k_1) = h(k_2)$.

Was tun bei einer Kollision?

- Können wir Hashfunktionen wählen, bei welchen es keine Kollisionen gibt?

- Eine andere Hashfunktion nehmen?

- Weitere Ideen?

Hashtabellen : Kollisionen

UNI FREIBURG

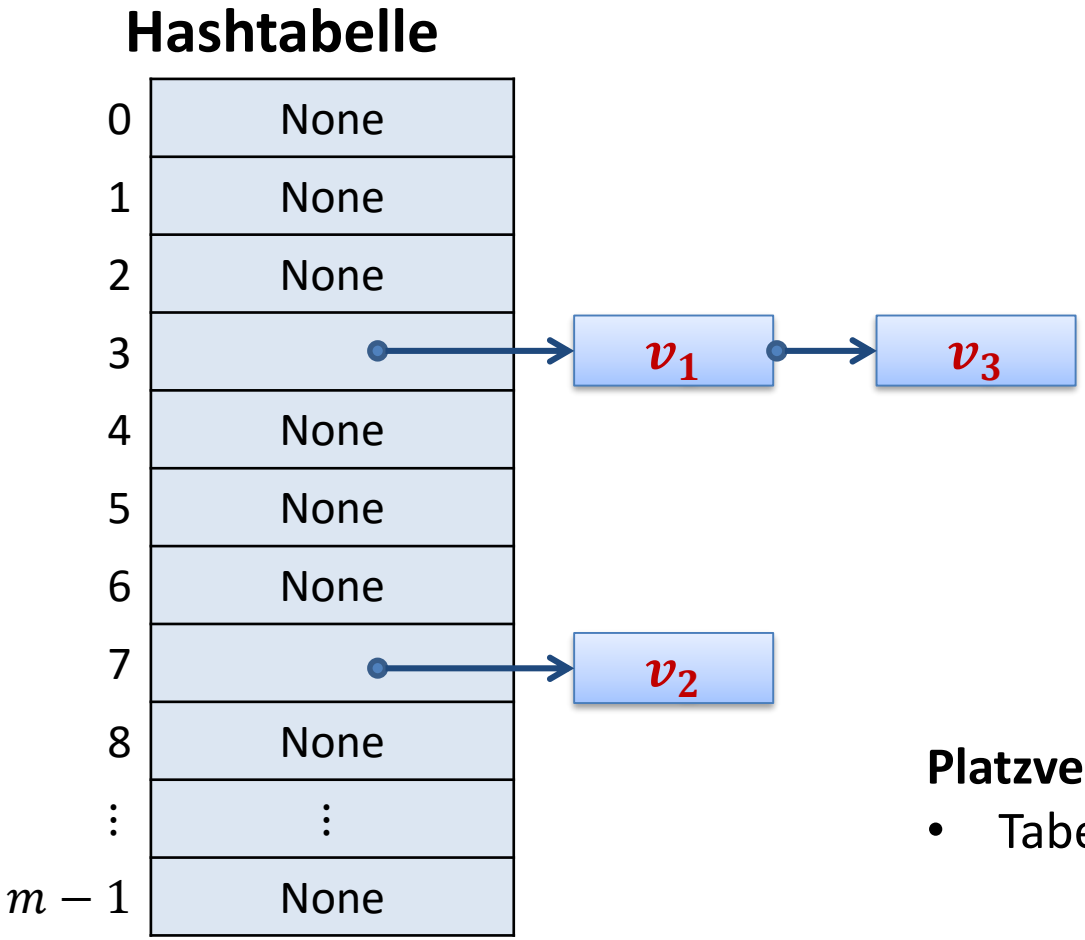
Kollisionen Lösungsansätze

- Annahme: Schlüssel k_1 und k_2 kollidieren

1. Speichere beide (key,value)-Paare an die gleiche Stelle
   - Die Hashtabelle muss an jeder Position Platz für mehrere Elemente bieten
   - Wir wollen die Hashtabelle aber nicht einfach vergrössern (dann könnten wir gleich mit einer grösseren Tabelle starten…)
   - **Lösung: Verwende verkettete Listen**
2. Speichere zweiten Schlüssel an eine andere Stelle
   - Kann man zum Beispiel mit einer zweiten Hashfunktion erreichen
   - Problem: An der alternativen Stelle könnte wieder eine Kollision auftreten
   - Es gibt mehrere Lösungen
   - Eine Lösung: Verwende viele mögliche neue Stellen (Man sollte sicherstellen, dass man die meistens nicht braucht…)

Hashtabellen mit Chaining

- Jede Stelle in der Hashtabelle zeigt auf eine verkette Liste



Platzverbrauch:

- Tabellengrösse m, Anz. Elemente n

Laufzeit Hashtabellen-Operationen

Zuerst, um's einfach zu machen, für den Fall ohne Kollisionen…

create:

insert:

find:

delete:

- Solange keine Kollisionen auftreten, sind Hashtabellen extrem schnell (falls die Hashfunktion schnell ausgewertet werden kann)
- Wir werden sehen, dass dies auch mit Kollisionen gilt…

Laufzeit mit Chaining

Verkettete Listen an allen Positionen der Hashtabelle

create:

insert:

find:

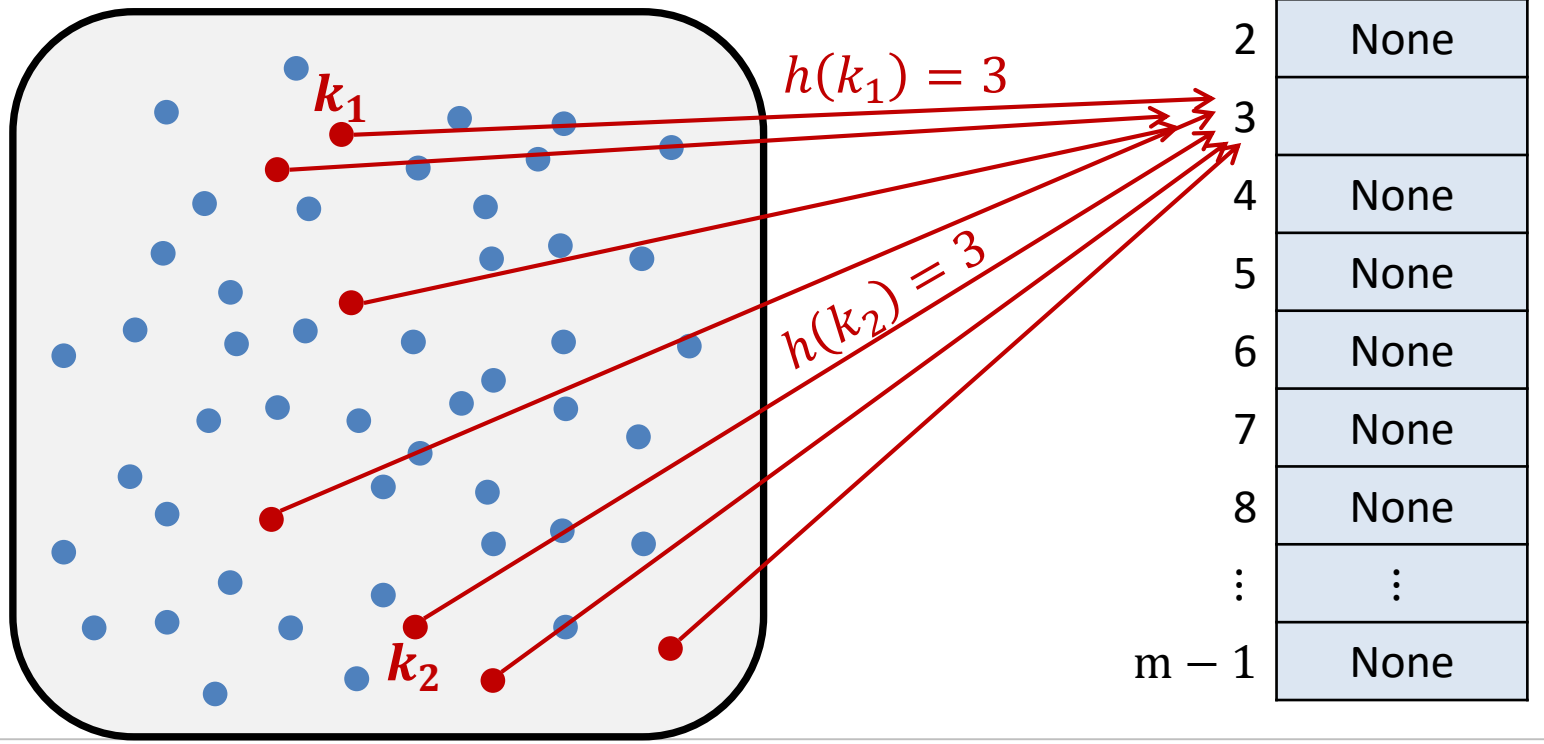
delete:

Funktionsweise Hashtabellen

Schlechtester Fall bei Hashing mit Chaining

- Alle Schlüssel, welche vorkommen, haben den gleichen Hashwert
- Ergibt eine verkettete Liste der Länge n

- Wahrscheinlichkeit bei zufälligem h:



Länge der verketten Liste

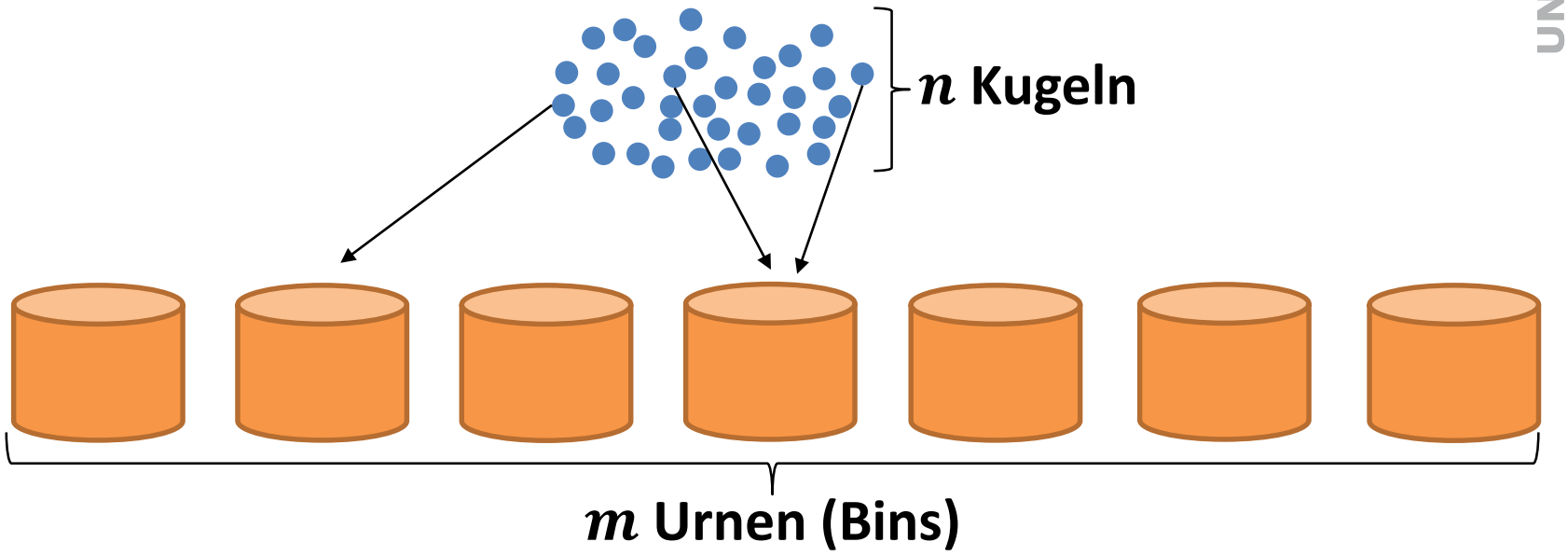
- Kosten von *find* und *delete* hängt von der Länge der entprechenden Liste ab
- Wie lang werden die Listen
  - Annahme: Grösse der Hashtabelle m, Anzahl Elemente n
  - Weitere Annahme: Hashfunktion h verhält sich wie zufällige Funktion
- Listenlängen entspricht folgendem Zufallsexperiment

m Urnen und n Kugeln

- Jede Kugel wird (unabhängig) in eine zufällige Urne geworfen
- Längste Liste = maximale Anz. Kugeln in der gleichen Urne
- Durchschnittliche Listenlänge = durchschn. Anz. Kugeln pro Urne

m Urnen, n Kugeln → durschn. #Kugeln pro Urne: n/m

Balls and Bins



- Worst-case Laufzeit = $\Theta(\max \#\text{Kugeln pro Urne})$

  mit hoher Wahrscheinlichkeit $\in O\left(n/m + \log n/\log\log n\right)$

  - bei $n \leq m$ also $O\left(\log n/\log\log n\right)$
- Erwartete Laufzeit (für jeden Schlüssel):
  - Schlüssel in Tabelle: entpricht der #Kugeln in der Urne einer zufälligen Kugel
  - Schlüssel nicht in Tabelle: #Kugeln einer zufälligen Urne

Erwartete Laufzeit von Find

UNI FREIBURG

Load α der Hashtabelle:

$$\alpha := \frac{n}{m}$$

Kosten einer Suche:

- Suche nach einem Schlüssel x, welcher nicht in der Hashtabelle ist

  $h(x)$ ist eine uniform zufällige Position

  → erwartete Listenlänge = durchschn. Listenlänge = α

  Erwartete Laufzeit:

Erwartete Laufzeit von Find

UNI FREIBURG

Load α der Hashtabelle:

$$\alpha := \frac{n}{m}$$

Kosten einer Suche:

- Suche nach einem Schlüssel x, welcher in der Hashtabelle ist

  Wieviele Schlüssel $y \neq x$ sind in der Liste von x?

- Die anderen Schlüssel sind zufällig verteilt, also entspricht die erwartete Anzahl $y \neq x$ der erwarteten Länge einer zufälligen Liste in einer Hashtabelle mit $n - 1$ Einträgen.

- Das sind $\frac{n-1}{m} < \frac{n}{m} = \alpha \rightarrow$ Erw. Listenlänge von $x < 1 + \alpha$

Erwartete Laufzeit:

Laufzeiten Hashing mit Chaining

UNI FREIBURG

Zusammenfassung Laufzeiten:

create & insert:

- Immer Laufzeit $O(1)$ (auch im Worst Case, unabhängig von α)

find & delete:

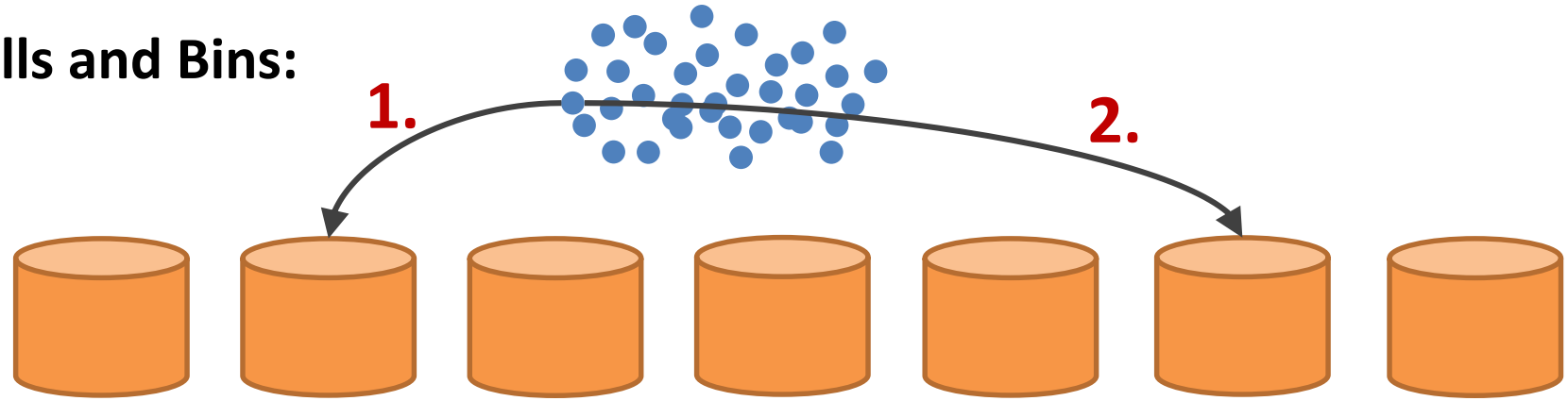
- Worst Case: $\boldsymbol{\Theta(n)}$
- Worst Case mit hoher Wahrsch. (bei zufälligem h): $\boldsymbol{O\left(\alpha + \frac{\log n}{\log \log n}\right)}$
- Erwartete Laufzeit (für bestimmten Schlüssel x): $\boldsymbol{O(1+\alpha)}$
  - gilt für erfolgreiche und nicht erfolgreiche Suchen
  - Falls $\alpha = O(1)$ (d.h., Hashtabelle hat Grösse $\Omega(n)$), dann ist das $O(1)$
- Hashtabellen sind extrem effizient und haben **typischerweise $\boldsymbol{O(1)}$ Laufzeit für alle Operationen**.

Kürzere Listenlängen

Idee:

- Benutze zwei Hashfunktionen h_1 und h_2
- Füge Schlüssel x in die kürzere der beiden Listen bei $h_1(x)$ und $h_2(x)$ ein

Balls and Bins:



- Lege Kugel in Urne mit weniger Kugeln
- Bei n Kugeln, m Urnen: maximale Anz. Kugeln pro Urne (whp):

$$\boldsymbol{n/m + O(\log\log m)}$$

- Bekannt als "power of two choices"

Gute Hashfunktionen

Wie wählt man eine gute Hashfunktion?

Was sollte eine gute Hashfunktion erfüllen?

- Im Prinzip sollte sie die gleichen Eigenschaften wie eine zufällige Funktion haben:
  - Mapping von verschiedenen Schlüsseln ist unabhängig
    (nicht klar, was das bei einer deterministischen Funktion genau heissen soll)
  - Mapping ist uniform zufällig (alle Hashwerte kommen gleich oft vor)
- Man kann diese Bedingungen meistens nicht überprüfen
- Falls man etwas über die Verteilung der Schlüssel weiss, kann man das allenfalls ausnützen
- Es gibt aber zum Glück einfache Heuristiken, welche in der Praxis gut funktionieren

Divisionsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

- Alle Werte zwischen 0 und $m - 1$ kommen gleich oft
  - So gut, das möglich ist

Vorteile:

- Sehr einfache Funktion
- Nur eine Division → kann man schnell berechnen
- Funktioniert oft recht gut, solange man m geschickt wählt...
  - besprechen wir gleich...

Bemerkung:

- Falls die Schlüssel keine ganzen Zahlen sind, kann man den Bitstring als ganze Zahl interpretieren

Divisionsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$h(x) = x \bmod m$$

Wahl des Divisors m

- Man könnte $h(x)$ besonders schnell berechnen falls $m = 2^k$
- Das ist aber keine gute Wahl, da man dann einfach die letzten k Bits als Hashwert bekommt!
  - Der Hashwert sollte von allen Bits abhängen
- Am besten wählt man m als Primzahl
- Eine Primzahl m, so dass $m = 2^k - 1$ ist auch keine gute Idee
  - siehe Übungsblatt 4
- Am besten: Primzahl m, welche nicht nahe bei einer 2er-Potenz ist

Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$\boldsymbol{h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor}$$

- A ist eine Konstante zwischen 0 und 1

Bemerkungen

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer k)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$ und

$$A = s \cdot 2^{-w}$$

Multiplikationsmethode

Wähle Hashfunktion als

$$\boldsymbol{h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor}$$

- A ist eine Konstante zwischen 0 und 1

Bemerkungen

- Hier kann man $m = 2^k$ wählen (für Integer k)
- Falls Integers von 0 bis $2^w - 1$ gehen, wählt man typischerweise einen Integer $s \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$ und

$$A = s \cdot 2^{-w}$$

  - Grundsätzlich funktioniert jedes A, in [Knuth; The Art of Comp. Progr. Vol. 3] wird empfohlen, dass

$$A \approx \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180339887 \dots$$

Zufällige Hashfunktionen

Falls h zufällig aus allen möglichen Funktionen ausgewählt wird:

$$\forall x_1, x_2 : \Pr\big(h(x_1) = h(x_2)\big) = \frac{1}{m}$$

Problem:

- eine solche Funktion kann nicht effizient repräsentiert und ausgewertet werden
  - Im Wesentlichen braucht man eine Tabelle mit allen möglichen Schlüsseln

Idee:

- Eine Funktion zufällig aus einem kleineren Bereich wählen
  - z.B. bei Multiplikationsmethode $h(x) = \lfloor m \cdot (Ax - \lfloor Ax \rfloor) \rfloor$ einfach den Parameter A zufällig wählen
- Nicht ganz so gut, wie eine uniform zufällige Funktion, aber wenn man's richtig macht, funktioniert die Idee → universelles Hashing

Universelles Hashing I

UNI FREIBURG

Definition:

- Sei S die Menge der mögl. Schlüssel und m die Grösse der Hashtab.
- Sei $\mathcal{H}$ eine Menge von Hashfunktionen $S \to \{0, \dots, m-1\}$
- Die Menge $\mathcal{H}$ heisst c-universell, falls

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow |\{h \in \mathcal{H} : h(x) = h(y)\}| \leq c \cdot \frac{|\mathcal{H}|}{m}$$

- Mit anderen Worten, falls man h zufällig aus $\mathcal{H}$ wählt, dann gilt

$$\forall x, y \in S : x \neq y \Longrightarrow \Pr\big(h(x) = h(y)\big) \leq \frac{c}{m}$$

Universelles Hashing II

Theorem:

- Sei $\mathcal{H}$ eine c-universelle Menge von Hashfkt. $S \to \{0, \dots, m-1\}$
- Sei $X \subset S$ eine beliebige Menge von Schlüsseln
- Sei $h \in \mathcal{H}$ eine zufällig gewählte Fkt. aus $\mathcal{H}$
- Für ein gegebenes $x \in X$ sei

$$B_x := \{y \in X : h(y) = h(x)\}$$

- Im Erwartungswert hat B_x Grösse $\leq 1 + c \cdot \frac{|X|}{m}$

Konsequenz:

- Im Erwartungswert sind alle Listen kurz!

Universelles Hashing III

- Gute universelle Mengen von Hashfunktionen existieren!

Beispiele:

- m beliebig, p: Primzahl mit $p > m$ und $p \geq |S|$

  $\mathcal{H}$: Menge der Fkt. $h_{a,b}(x) = (a \cdot x + b) \bmod p \bmod m$

  – wobei $a, b \in S$

- m beliebig, $k = \lceil \log_m |S| \rceil$, Parameter $a \in S$

  Basis m-Darstellung von a, x: $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot m^i$, $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \cdot m^i$

  $\mathcal{H}$: Menge der Fkt. $h_a(x) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot x_i\right) \bmod m$

Hashing mit offener Adressierung

UNI FREIBURG

Ziel:

- Speichere alles direkt in der Hashtabelle (im Array)
- offene Adressierung = geschlossenes Hashing
- keine Listen

Grundidee:

- Bei Kollisionen müssen alternative Einträge zur Verfügung stehen
- Erweitere Hashfunktion zu

$$h: S \times \{0, \dots, m-1\} \to \{0, \dots, m-1\}$$

  - Für jedes $x \in S$ sollte $h(x, i)$ durch alle m Werte gehen (für versch. i)

- Zugriff (schreiben/lesen) zu Element mit Schlüssel x:
  - Versuche der Reihe nach an den Positionen

$$h(x, 0), h(x, 1), h(x, 2), \dots, h(x, m-1)$$

Lineares Sondieren

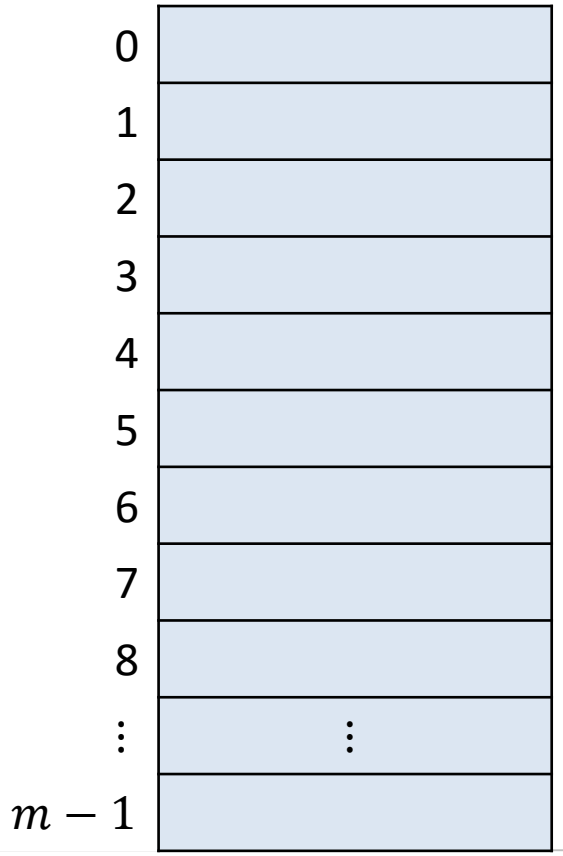
Idee:

- Falls $h(x)$ besetzt, versuche die nachfolgende Position:

$$\boldsymbol{h(x,i) = (h(x) + i) \bmod m}$$

für $i = 0, \dots, m-1$

- **Beispiel:**
  Füge folgende Schlüssel ein
  - $x_1, h(x_1) = 3$
  - $x_2, h(x_2) = 5$
  - $x_3, h(x_3) = 3$
  - $x_4, h(x_4) = 8$
  - $x_5, h(x_5) = 4$
  - $x_6, h(x_6) = 6$
  - …



Lineares Sondieren

Vorteile:

- sehr einfach zu implementieren
- alle Arraypositionen werden angeschaut
- gute Cache-Lokalität

Nachteile:

- Sobald es Kollisionen gibt, bilden sich Cluster
- Cluster wachsen, wenn man in irgendeine Position des Clusters "hineinhasht"
- Cluster der Grösse k wachsen in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit $(k+1)/m$
- Je grösser die Cluster, desto schneller wachsen sie!!

Quadratisches Sondieren

UNI FREIBURG

Idee:

- Nehme Sequenz, welche nicht zu Cluster führt:

$$\boldsymbol{h(x,i) = \left(h(x) + c_1 i + c_2 i^2\right) \bmod m}$$

für $i = 0, \ldots, m-1$

Vorteil:

- ergibt keine zusammenhängenden Cluster
- deckt bei geschickter Wahl der Parameter auch alle m Positionen ab

Nachteil:

- kann immer noch zu einer Art Cluster-Bildung führen
- Problem: der erste Hashwert bestimmt die ganze Sequenz!
- Asympt. im besten Fall so gut, wie Hashing mit verketteten Listen

Doppel-Hashing

UNI FREIBURG

Ziel: Verwende mehr als m verschiedene Abfolgen von Positionen

Idee: Benutze zwei Hashfunktionen

$$\boldsymbol{h(x,i) = \big(h_1(x) + i \cdot h_2(x)\big) \bmod m}$$

Vorteile:

- Sondierungsfunktion hängt in zwei Arten von x ab
- Vermeidet die Nachteile von linearem und quadr. Sondieren
- Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schlüssel x und x' die gleiche Positionsfolge erzeugen:

$$h_1(x) = h_1(x') \wedge h_2(x) = h_2(x') \implies \text{WSK} = \frac{1}{m^2}$$

- Funktioniert in der Praxis sehr gut!