Informatik II - SS 2016

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 10 (27.5.2016)

Binäre Suchbäume II

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

Zusätzliche Dictionary Operationen

UNI FREIBURG

Dictionary:

Hashtab. sehr eff: insert, delete, find

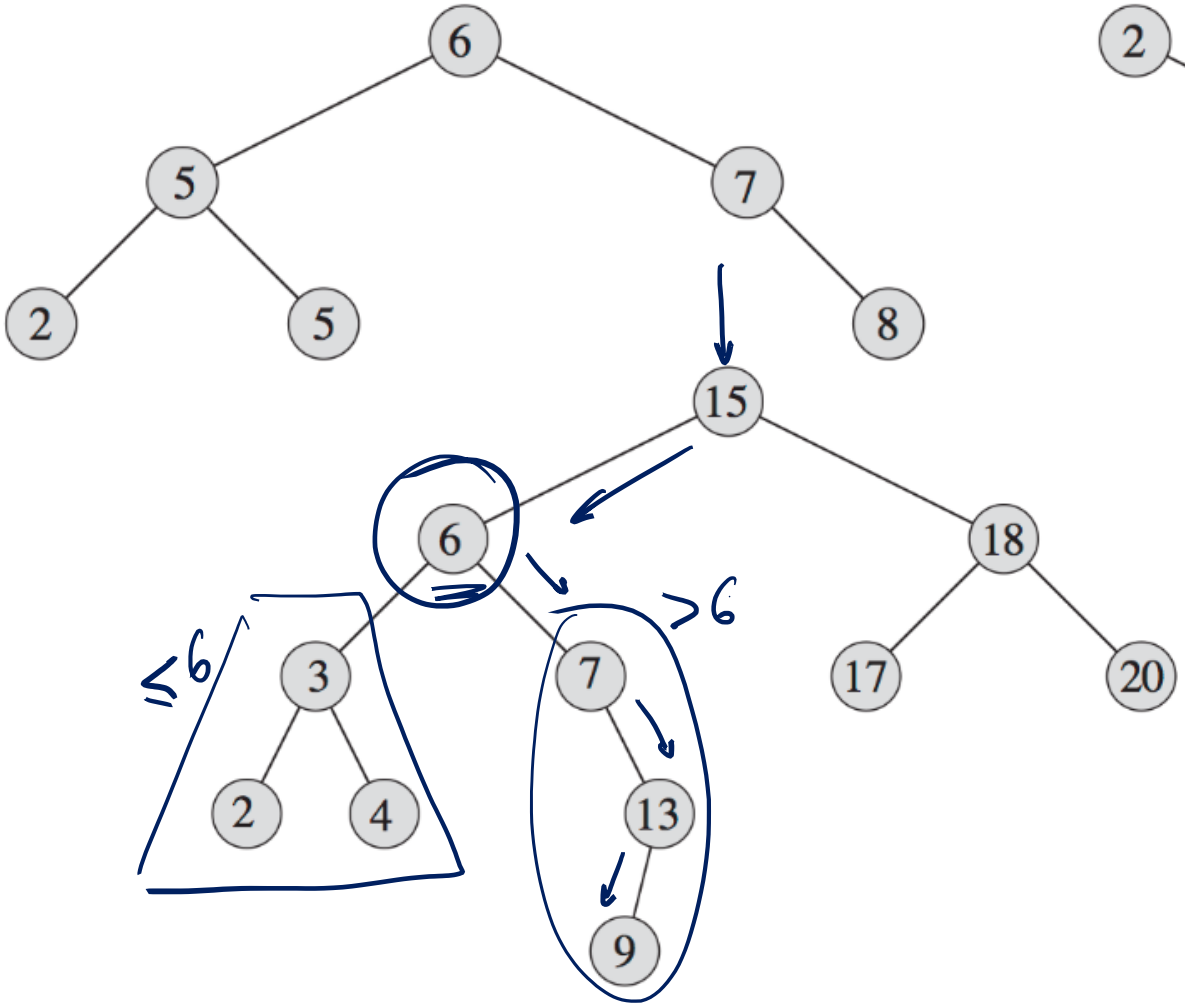
Zusätzliche mögliche Operationen:

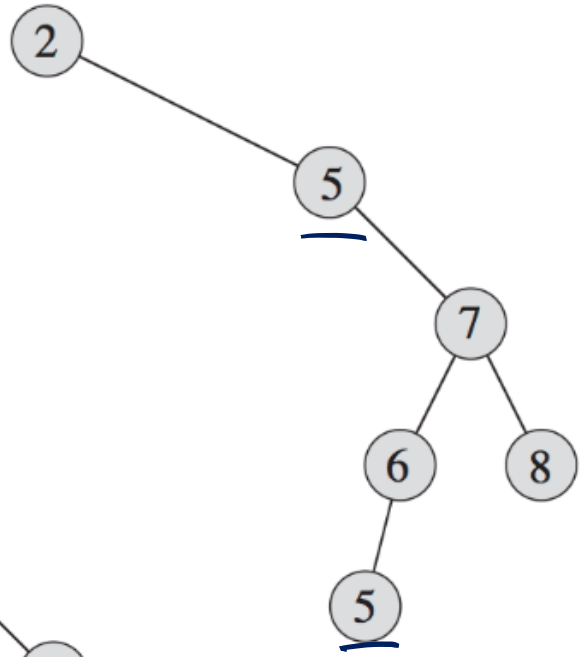
- *D.minimum()* : gibt kleinsten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.maximum()* : gibt grössten *key* in der Datenstruktur zurück
- *D.successor(key)* : gibt nächstgrösseren *key* zurück
- *D.predecessor(key)* : gibt nächstkleineren *key* zurück
- *D.getRange(k1, k2)* : gibt alle Einträge mit Schlüsseln im Intervall *[k1,k2]* zurück

- Lassen sich mit Hashtabellen nicht effizient implementieren!

Binäre Suchbäume

- Binäre Suchbäume müssen nicht immer so schön symmetrisch sein…

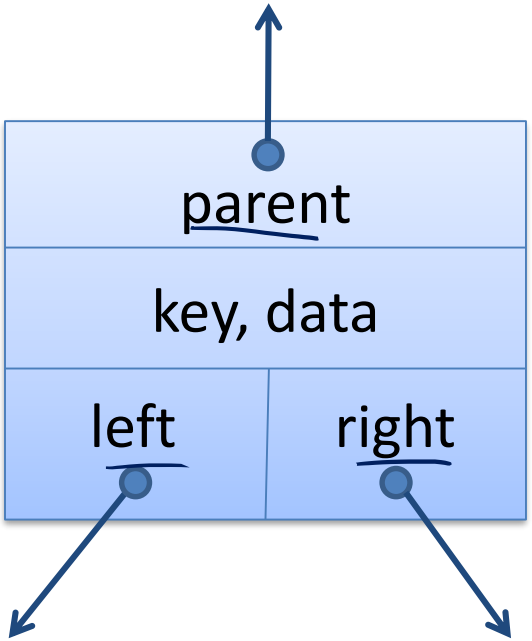




Quelle: [CLRS]

Binärer Suchbaum : Elemente

TreeElement:

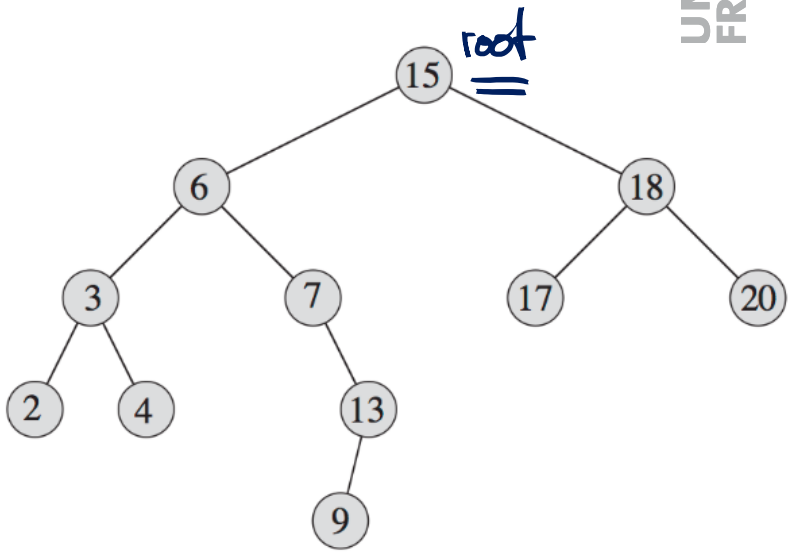


Implementierung: gleich wie bei den Listen-Elementen

Suche in einem binären Suchbaum

Suche nach Schlüssel x

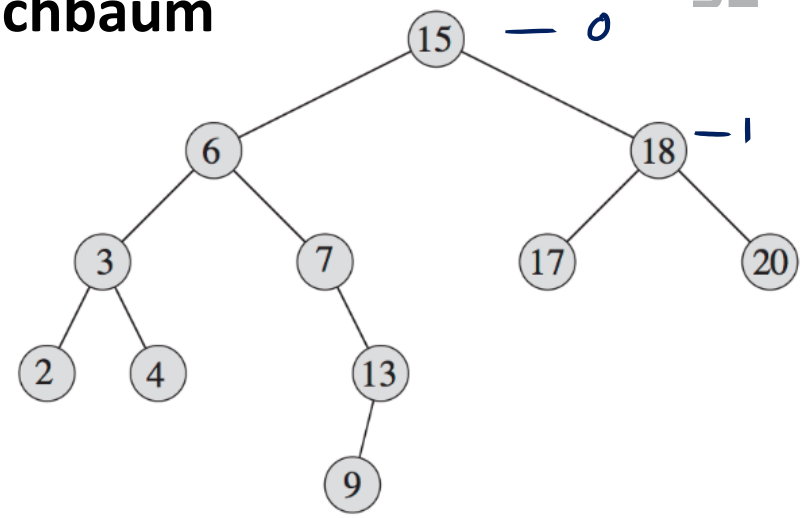
- Benutze binäre Suche
  (darum heisst's binärer Suchbaum…)




```
current = root
while current is not None and current.key != x:
    if current.key > x:
        current = current.left
    else:
        current = current.right
```

Suche in einem binären Suchbaum

Laufzeit der Suche in einem binären Suchbaum



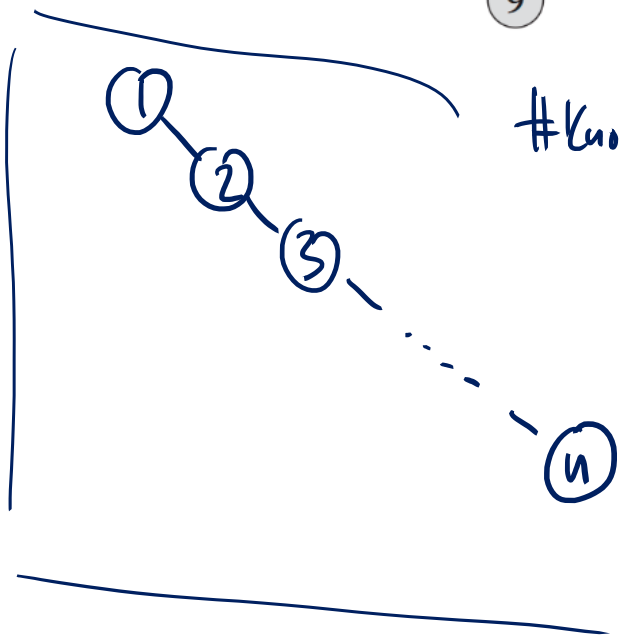
$O($Tiefe des Baums$)$

Worst Case:

Tiefe $\in \Theta(n)$

Best Case:

Tiefe $\in O(\log n)$

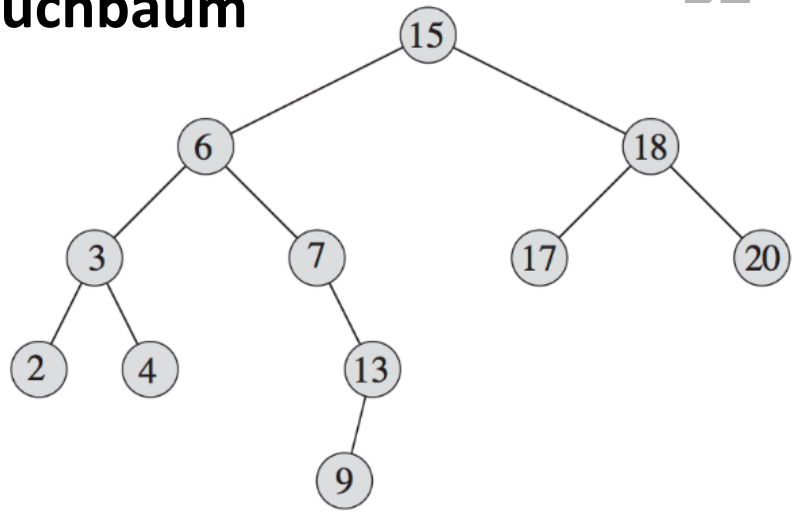


#Knoten in Ebene i

$\leq 2^i$

Suche Minimum / Maximum

Finde kleinstes Element in einem bin. Suchbaum

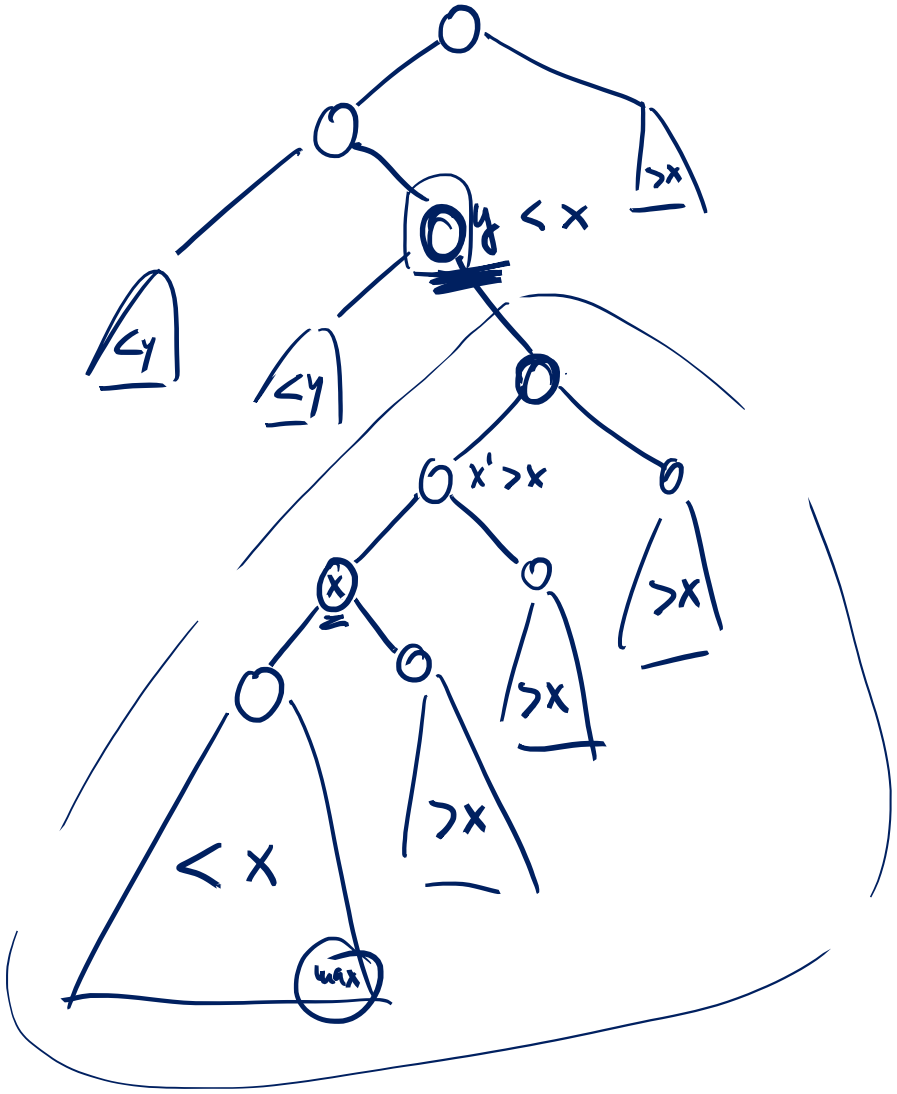


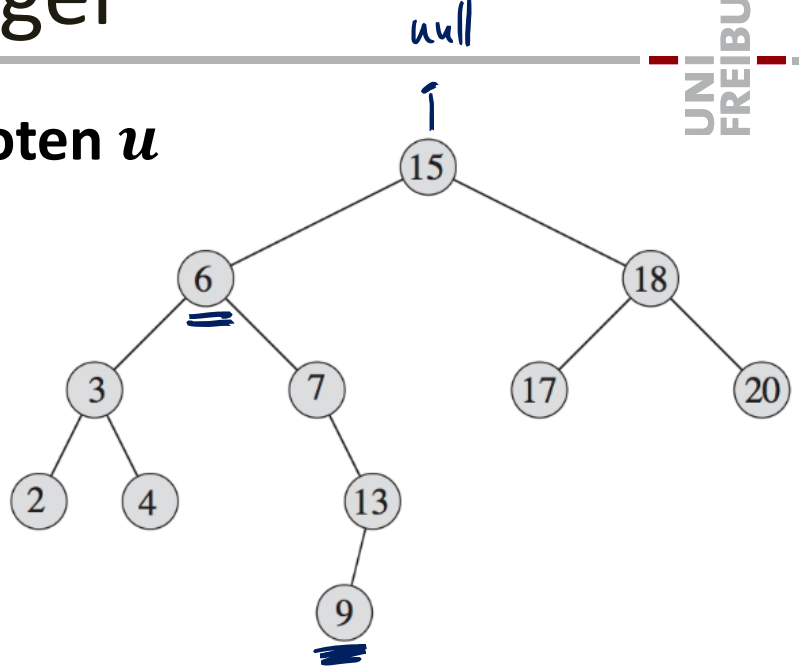

```
current = root
while current.left is not None:
    current = current.left
```

Laufzeit: $O(\text{Tiefe})$

Suche Vorgänger / Nachfolger

Finde Vorgänger / Nachfolger eines Knoten u





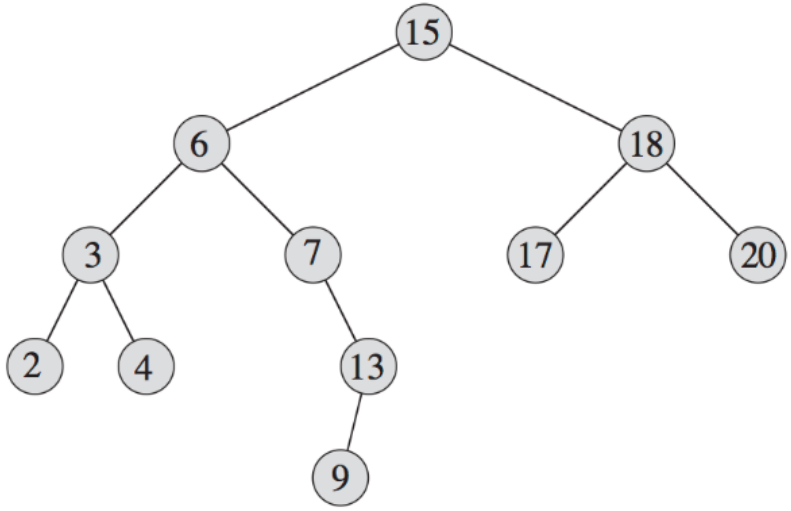
falls l. Teilbaum nicht leer:
max im l. Teilbaum

Sonst
geh Richt. root bis
curr. parent. right = current
return curr. parent

Suche Vorgänger / Nachfolger

Finde Nachfolger eines Knoten u

Annahme: $u \neq$ None



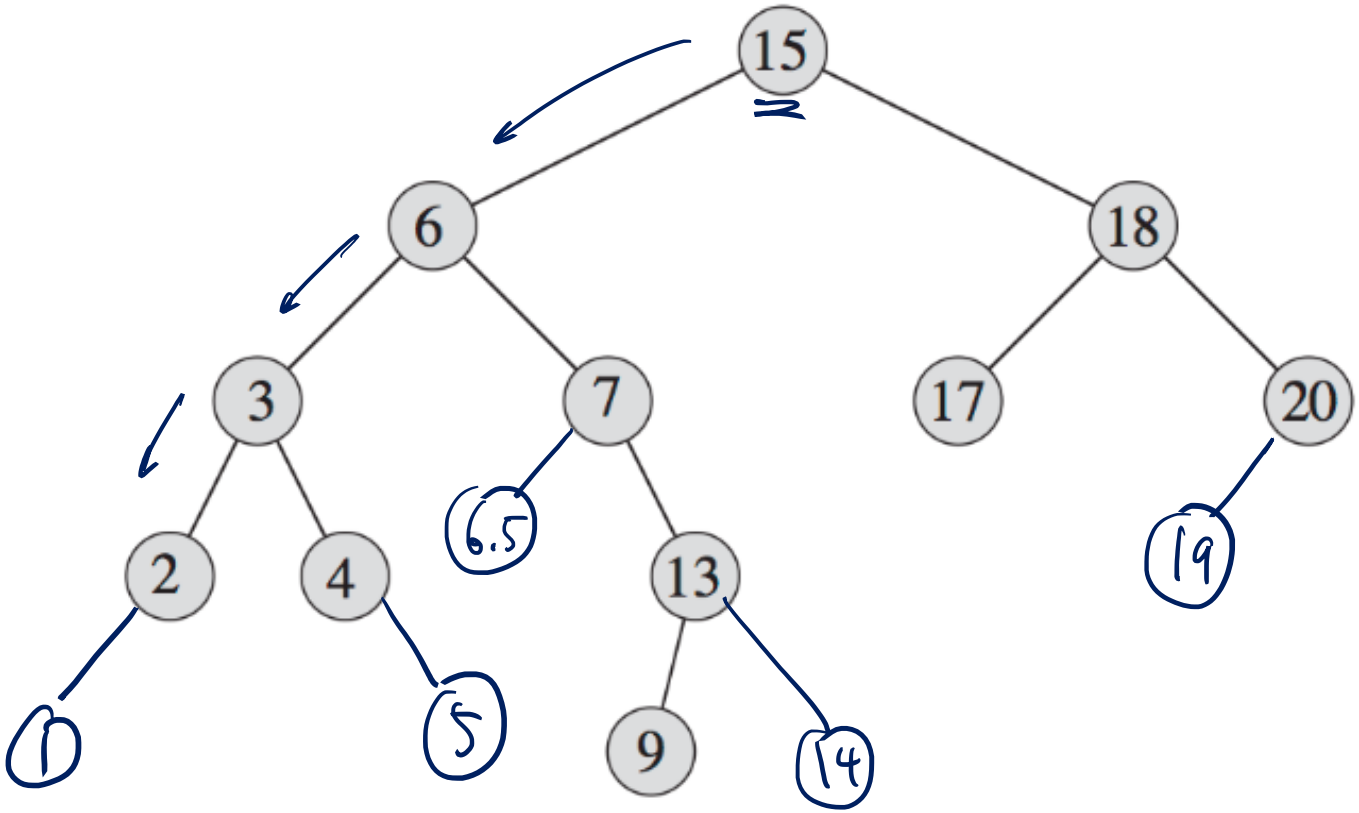

```
if u.right is not None:
    // min in right subtree
    current = u.right
    while current.left is not None:
        current = current.left
else return current
    // find first pred. s.t. u is in left subtree
    current = u
    parent = current.parent
    while parent is not None and parent.left != current:
        current = parent
        parent = current.parent
return parent
```

Return parent

Laufzeit: $O(\text{Tiefe})$

Einfügen eines Schlüssels

Füge Schlüssel 1, 5, 14, 6.5, 19 ein…



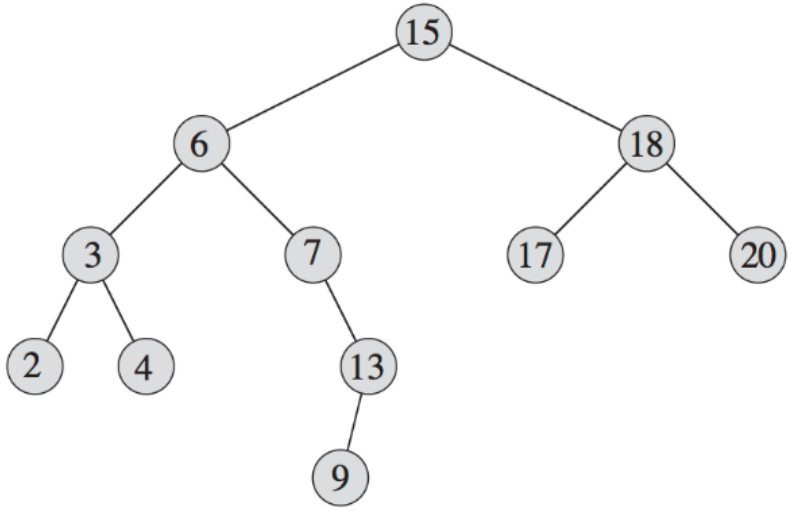
Einfügen eines Schlüssels

parent = None

Füge Schlüssel x ein

parent l r

```
if root is None:
    root = new TreeElm(x, None, None, None)
else:
    current = root
    while current is not None and current.key != x:
        parent = current
        if x < current.key:
            current = current.left
        else:
            current = current.right
    if current is None:
        if x < parent.key:
            parent.left = new TreeElm(x, parent, None, None)
        else
            parent.right = ...
```



oder rekursiv

Löschen eines Schlüssels I

Lösche Schlüssel x, einfache Fälle:

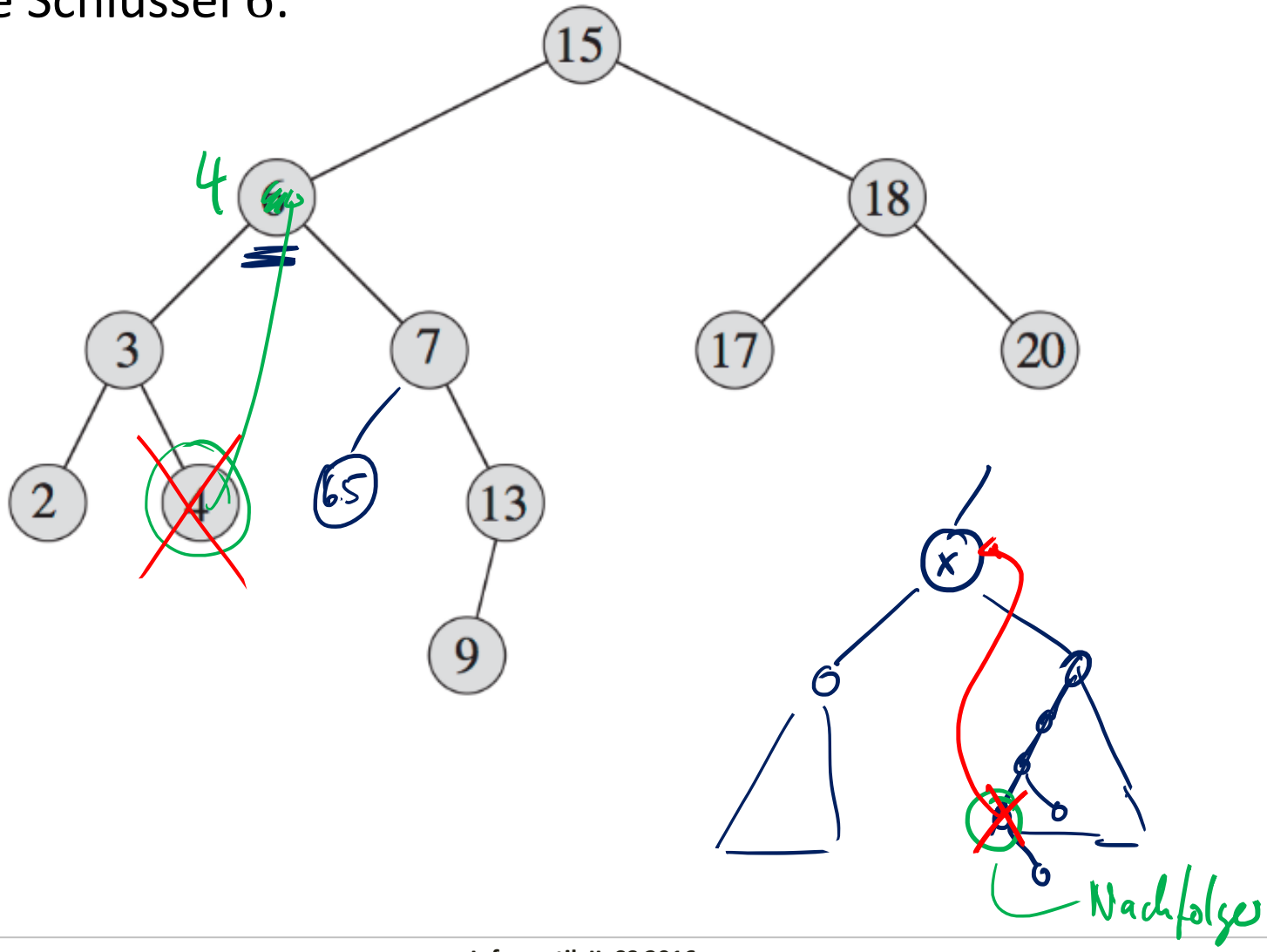
- Schlüssel x ist in einem Blatt des Baums
  - Blatt = Knoten hat keine Kinder

- Knoten mit Schlüssel x hat nur 1 Kind

Löschen eines Schlüssels II

Lösche Schlüssel x, Knoten hat zwei Kinder:

- Lösche Schlüssel 6:



Löschen eines Schlüssels III

Lösche Schlüssel x, Knoten hat zwei Kinder:

- Vorgänger ist grösster Knoten im linken Teilbaum
  - Vorgänger hat kein rechtes Kind
- Nachfolger ist kleinster Knoten im rechten Teilbaum
  - Nachfolger hat kein linkes Kind

- Schreibe Schlüssel und Daten des Vorgängers (oder alternativ Nachfolgers) in den Knoten von x
- Lösche Vorgänger/Nachfolger-Knoten
  - Vorgänger/Nachfolger ist entweder ein Blatt oder hat nur ein Kind

Löschen eines Schlüssels IV

Lösche Schlüssel x:

1. Finde Knoten u mit $u.key = x$
   - wie üblich mit binärer Suche
2. Falls u nicht 2 Kinder hat, lösche Knoten u
   - Annahme: v ist Parent von u, u ist linkes Kind von v (anderer Fall analog)
   - Fall u ein Blatt ist, wird $v.parent.left = \text{None}$
   - Falls u ein Kind w hat, wird $v.parent.left = w$
3. Falls u zwei Kinder hat, dann bestimme Vorgängerknoten v
   - Funktioniert auch mit Nachfolgerknoten
4. Setze $u.key = v.key$ und $u.data = v.data$
5. Lösche Knoten v (gleich, wie oben u gelöscht wird)
   - Knoten v hat höchstens 1 Kind!

Laufzeit Binärer Suchbaum

Die Operationen

find, min, max, predecessor, successor, insert, delete

haben alle **Laufzeit $O(\text{Tiefe des Baums})$**.

Was ist die Tiefe eines binären Suchbaums?

best case: $\Theta(\log n)$

worst case: $\Theta(n)$

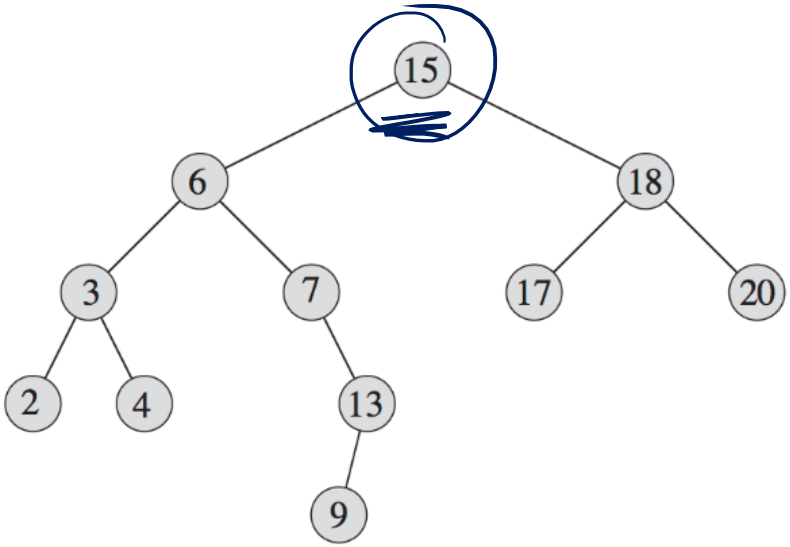
Sortieren mit binärem Suchbaum

1. Füge alle Elemente in einen binären Suchbaum ein
2. Lese die Elemente in sortierter Reihenfolge aus
   - Einfachste Lösung: suche und entferne das Minimum
   - Oder: suche Minimum und dann $n-1$ Mal *getSuccessor*

O(n · Tiefe)
best case:
O(n log n)

Bessere Lösung: Auslesen aller Elemente:

- Rekursiv:
  1. Lese linken Teilbaum aus (rekursiv)
  2. Lese Wurzel aus
  3. Lese rechten Teilbaum aus (rekursiv)

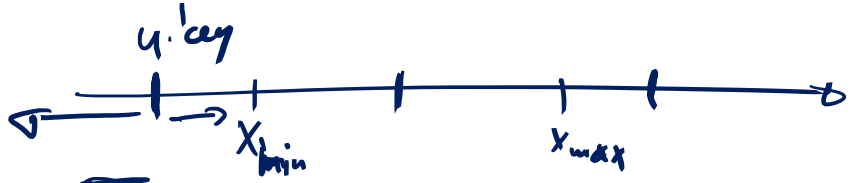


Auslesen eines Teils der Elemente

Gegeben: Schlüssel $x_{\min}$ und $x_{\max}$ $(x_{\min} \leq x_{\max})$

Ziel: Gebe **alle Schlüssel x, $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$** aus.

```
visit(u):
    if u.key > x_min:
        visit(u.left)
    if x_min ≤ u.key ≤ x_max:
        output(u)
    if u.key < x_max:
        visit(u.right)
```



Laufzeit:

$O(\text{Tiefe} + \text{"Ausgabe"})$

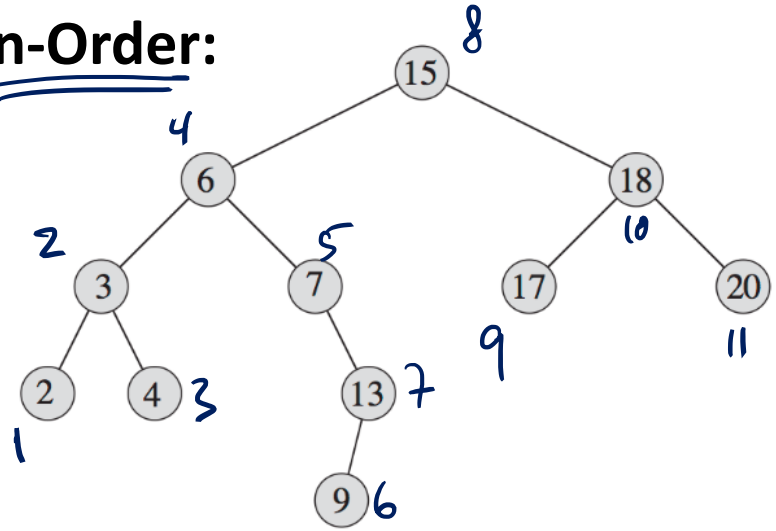
$\#\text{Schlüssel} \in [x_{\min}, x_{\max}]$

Gebe all Schlüssel $\in [x_{\min}, x_{\max}]$ im Teilbaum von u aus

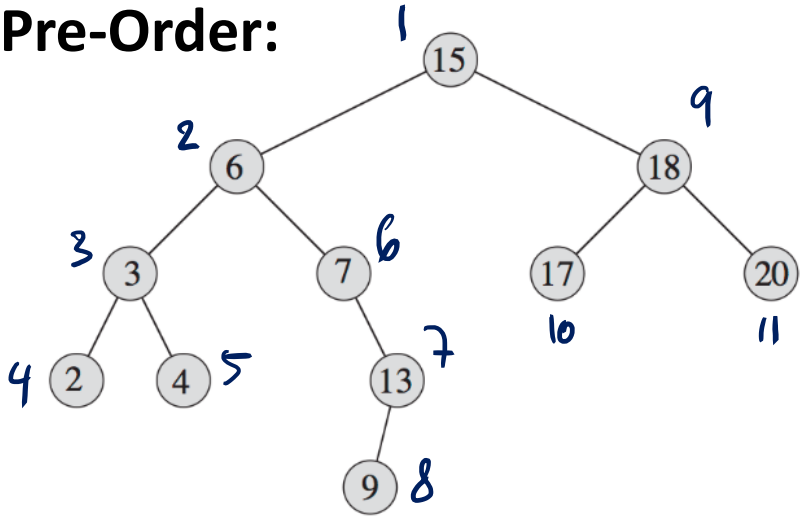
Traversieren eines binären Suchbaums

Ziel: Besuche alle Knoten eines binären Suchbaums einmal

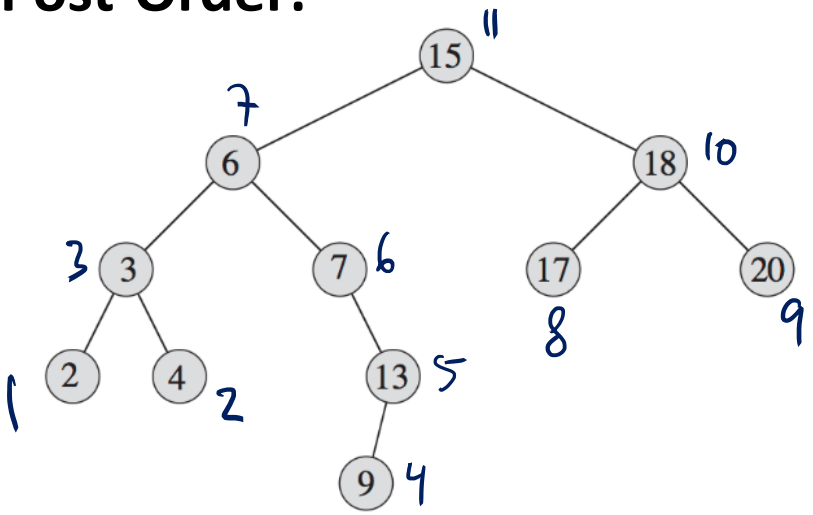
In-Order:



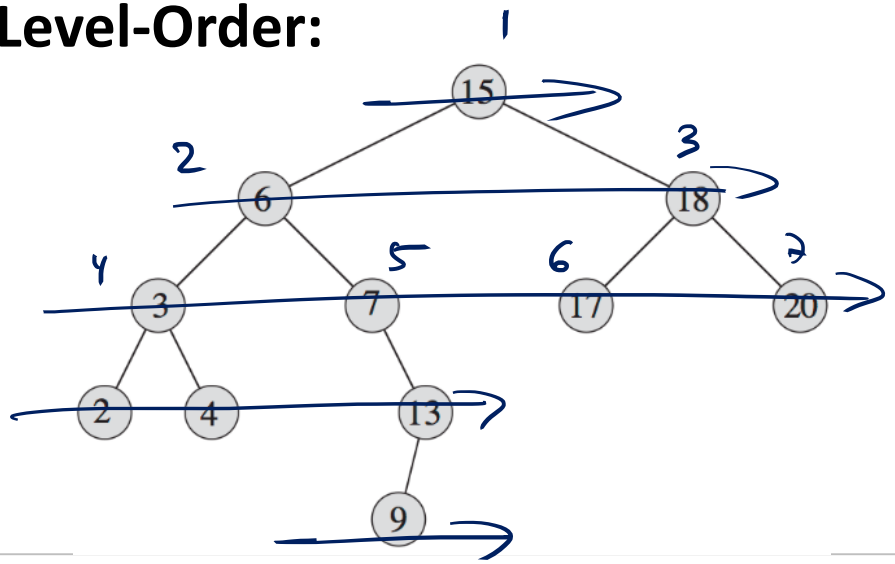
Pre-Order:



Post-Order:



Level-Order:



Traversieren eines binären Suchbaums

Tiefensuche (Depth First Search / DFS Traversal)

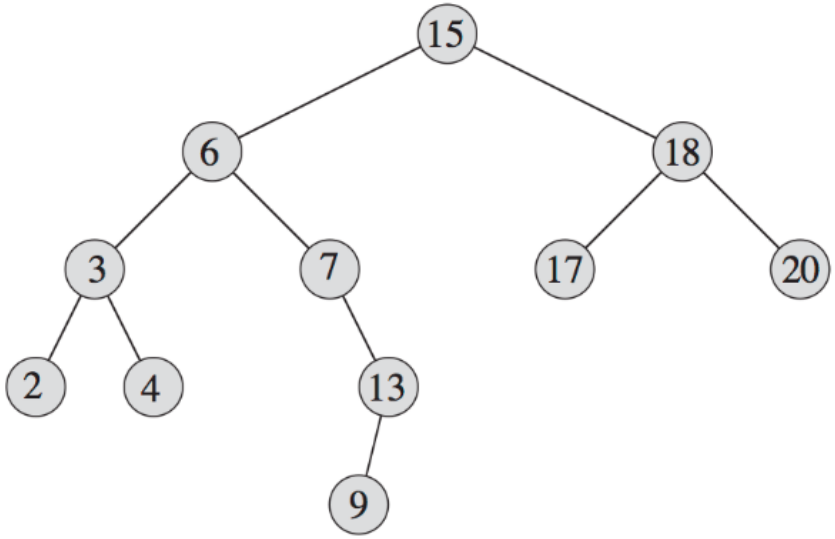
Pre-Order: 15, 6, 3, 2, 4, 7, 13, 9, 18, 17, 20

In-Order: sortierte Reihenfolge

Post-Order: 2, 4, 3, 9, 13, 7, 6, 17, 20, 18, 15

Breitensuche (Breadth First Search / BFS Traversal)

Level-Order: 15, 6, 18, 3, 7, ...



Tiefensuche / DFS Traversierung

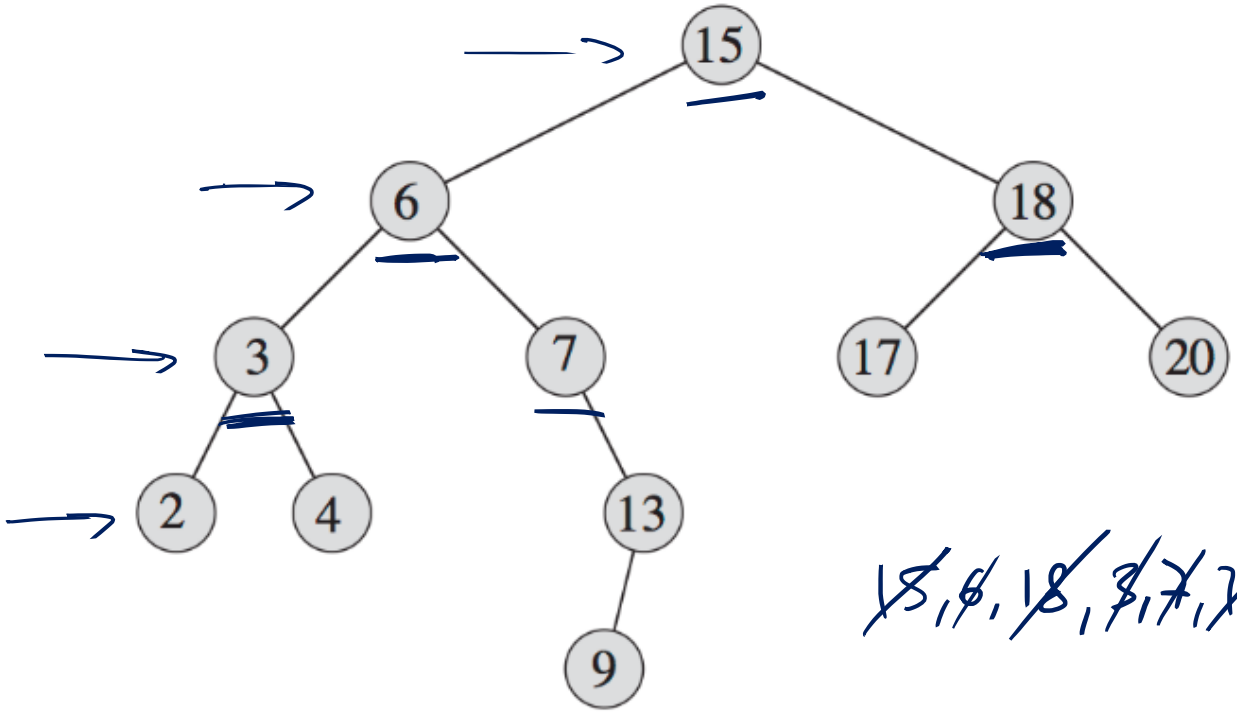
```
preorder(node):
    if node != None
        visit(node)
        preorder(node.left)
        preorder(node.right)

inorder(node):
    if node != None
        inorder(node.left)
        visit(node)
        inorder(node.right)

postorder(node):
    if node != None
        postorder(node.left)
        postorder(node.right)
        visit(node)
```

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche



15, 6, 18, 3, 7, 17, 20, 2, 4, 13, 9

Warteschlange (FIFO Queue)

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche
- Lösung mit einer Warteschlange:
  - Wenn ein Knoten besucht wird, werden seine Kinder in die Queue eingereiht

```
BFS-Traversal:
    Q = new Queue()
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        node = Q.dequeue()
        visit(node)
        if node.left != None
            Q.enqueue(node.left)
        if node.right != None
            Q.enqueue(node.right)
```

Analyse Baum-Traversierung

UNI FREIBURG

Tiefensuche:

- Jeder Knoten wird genau einmal besucht
- Kosten pro Knoten: $O(1)$
- **Gesamtzeit** für DFS Traversierung: $\boldsymbol{O(n)}$

Breitensuche:

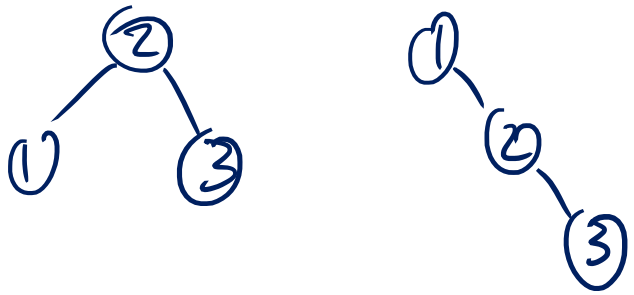
- Jeder Knoten wird genau einmal besucht
  - Kosten pro Knoten ist linear in der Anzahl Kinder
  - Aber: Jeder Knoten wird genau einmal in die FIFO-Queue eingefügt
- Kosten pro Knoten (amortisiert): $O(1)$
- **Gesamtzeit** für BFS Traversierung: $\boldsymbol{O(n)}$

Anwendungen Tiefensuche I

In-Order Traversierung:

- Besucht die Elemente eines binären Suchbaums in sortierter Reihenfolge
- Sortieren:
  1. Einfügen aller Elemente
  2. In-Order Traversierung

- Beobachtung: Reihenfolge hängt nur von der Menge der Elemente (Schlüssel) ab, nicht aber von der Struktur des Baums

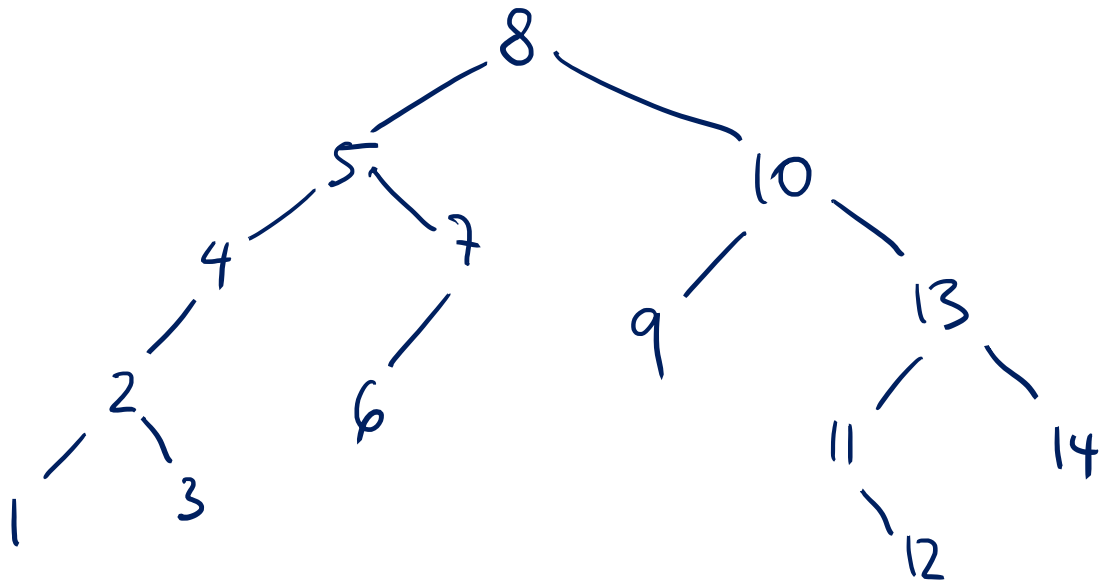


Anwendungen Tiefensuche II

Pre-Order Traversierung:

- Aus der Pre-Order-Reihenfolge lässt sich der Baum in eindeutiger (und effizienter) Weise rekonstruieren
- Geeignet, um den Baum z.B. in einer Datei zu speichern

Beispiel: Pre-Order $8, 5, 4, 2, 1, 3, 7, 6, 10, 9, 13, 11, 12, 14$



Anwendungen Tiefensuche III

Post-Order Traversierung:

- Löschen eines ganzen binären Suchbaums
- Zuerst muss der Speicher der Teilbäume freigegeben werden, dann kommt die Wurzel

```
delete-tree(node)
    if (node != None)
        delete-tree(node.left)
        delete-tree(node.right)
        delete node
```

Tiefe eines binären Suchbaums

Worst-Case Laufzeit der Operationen in binären Suchbäumen:

$$O(\text{Tiefe des Baums})$$

- Im **besten Fall** ist die Tiefe $\log_2 n$
  - Definition Tiefe: Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt
- Im **schlechtesten Fall** ist die Tiefe $n - 1$

Was ist die Tiefe in einem typischen Fall?

- Was ist ein typischer Fall?

Ist es möglich, in einem binären Suchbaum immer Tiefe $O(\log n)$ zu garantieren?

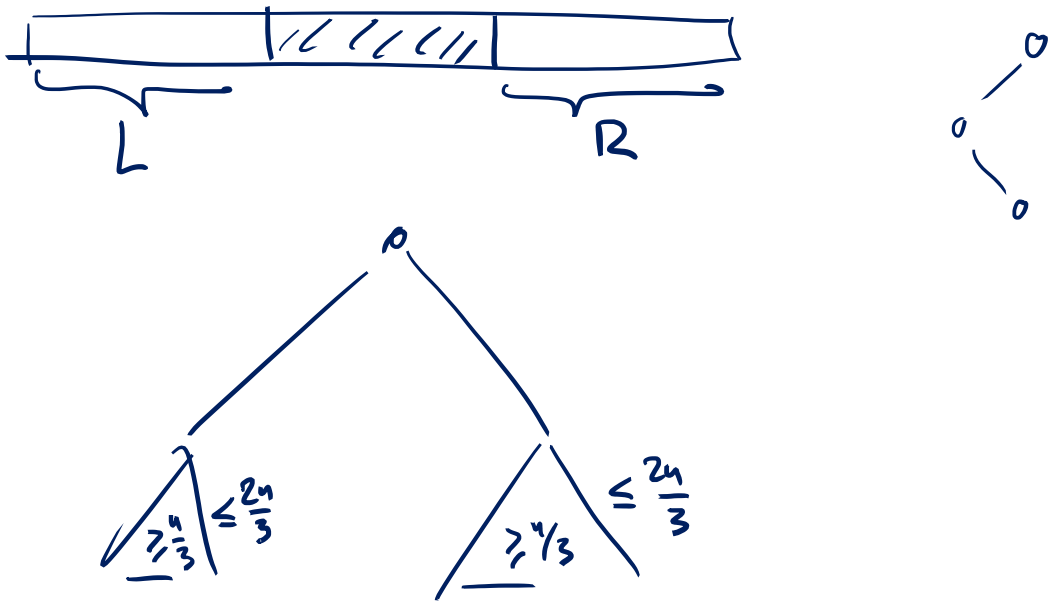
“Typischer” Fall

Zufälliger binärer Suchbaum:

- **n Schlüssel werden in zufälliger Reihenfolge eingefügt**

Beobachtung:

- Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ haben beide Teilbäume der Wurzel mindestens $n/3$ Knoten.



“Typischer” Fall

UNI FREIBURG

Zufälliger binärer Suchbaum:

- **n Schlüssel werden in zufälliger Reihenfolge eingefügt**

Beobachtung:

- Mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ haben beide Teilbäume der Wurzel mindestens $n/3$ Knoten.
- Analoges gilt auch für alle Teilbäume
- Im Durchschnitt wird deshalb auf jedem 3. Schritt von der Wurzel Richtung eines Blattes, der Teilbaum um einen Faktor $2/3$ kleiner!
- Verkleinern um einen Faktor $2/3$ geht nur $O(\log n)$ oft.
- Tiefe eines zufälligen binären Suchbaums ist deshalb $O(\log n)$
- Genaue Rechnung ergibt:

Erwartete Tiefe eines zufälligen bin. Suchbaums: $\mathbf{4.311 \cdot \ln n}$

“Typischen” Fall erzwingen?

UNI FREIBURG

“Typischer” Fall:

- Falls die Schlüssel in zufälliger Reihenfolge eingefügt werden, hat der Baum Tiefe $O(\log n)$
- Operationen haben Laufzeit $O(\log n)$

Problem:

- Zufällige Reihenfolge ist nicht unbedingt der typische Fall!
- Vorsortierte Werte kann genau so typisch sein
  - Das ergibt einen sehr schlechten binären Suchbaum

Idee:

- Können wir zufällige Reihenfolge erzwingen?
- Schlüssel werden in beliebiger Reihenfolge eingefügt, aber Struktur soll immer wie bei zufälliger Reihenfolge sein!