Informatik II - SS 2016

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 13 (8.6.2016)

Graphenalgorithmen I

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

Algorithmen und Komplexität

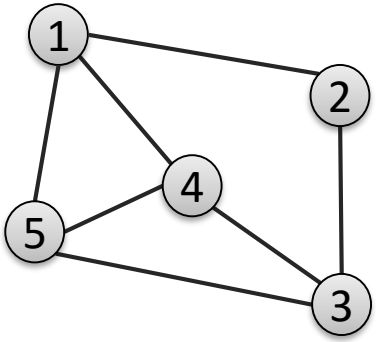
Graphen

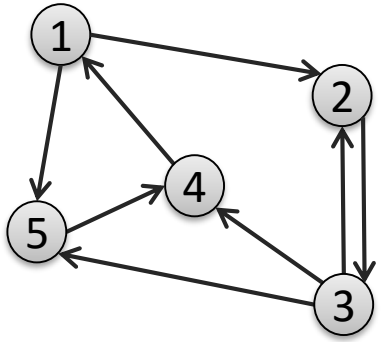
Knotenmenge V, typischerweise $n := |V|$

Kantenmenge E, typischerweise $m := |E|$

- ungerichteter Graph: $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$
- gerichteter Graph: $E \subseteq V \times V$

Beispiele:





Knotengrade

Graph $G = (V, E)$ ungerichtet:

- Grad eines Knoten $u \in V$: Anzahl Kanten (Nachbarn) von u

$$\deg(u) := |\{u, v\} : \{u, v\} \in E|$$

Graph $G = (V, E)$ gerichted:

- Eingangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl eingehende Kanten

$$\deg_{in}(u) := |(v, u) : (v, u) \in E|$$

- Ausgangsgrad eines Knoten $u \in V$: Anzahl ausgehende Kanten

$$\deg_{out}(u) := |(u, v) : (u, v) \in E|$$

Pfade

UNI FREIBURG

Pfade in einem Graph $G = (V, E)$

- Ein Pfad in G ist eine Folge $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ mit
  - gerichteter Graph: $(u_i, u_{i+1}) \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
  - ungerichteter Graph: $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$

Länge eines Pfades (z. T. auch Kosten eines Pfades)

- ohne Kantengewichte: Anzahl der Kanten
- mit Kantengewichten: Summe der Kantengewichte

Kürzester Pfad (shortest path) zwischen Knoten u und v

- Pfad $u, \dots, v$ mit kleinster Länge
- **Distanz** $d(u, v)$: Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v

Durchmesser $\boldsymbol{D := \max_{u,v \in V} d(u, v)}$

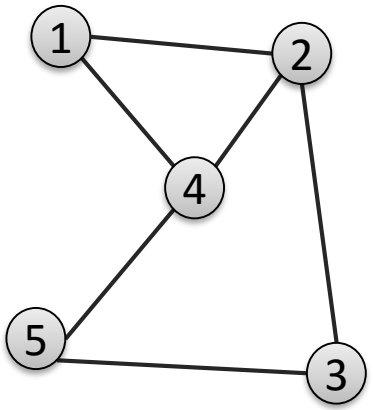
- Länge des längsten kürzesten Pfades

Repräsentation von Graphen

Zwei klassische Arten, einen Graphen im Rechner zu repräsentieren

- **Adjazenzmatrix:** Platzverbrauch $O(|V|^2) = O(n^2)$
- **Adjazenzlisten:** Platzverbrauch $O(|V| + |E|) = O(n + m)$

Beispiel:



Adjazenzmatrix

UNI FREIBURG

Details:

- Bei **Kantengewichten**, trägt man die Gewichte (statt $0/1$) in die Matrix ein (implizit: Gewicht 0 = Kante existiert nicht)
- **Gerichtete Graphen:** Ein Eintrag pro gerichtete Kante
  - Kante von i nach j: Eintrag in Zeile i und Spalte j
- **Ungerichtete Graphen:** Zwei Einträge pro Kante
  - Matrix ist in diesem Fall symmetrisch

Eigenschaften Adjazenzmatrix:

- Speichereffizient, falls $|E| = m \in \Theta(|V|^2) = \Theta(n^2)$
  - speziell für ungewichtete Graphen: nur ein Bit pro Matrixeintrag
- Nicht speichereffizient bei dünn besetzten Graphen ($m \in o(n^2)$)
- Für gewisse Algorithmen, die "richtige" Datenstruktur
- "Kante zwischen u und v" kann in $O(1)$ Zeit beantwortet werden

Adjazenzlisten

UNI FREIBURG

Struktur

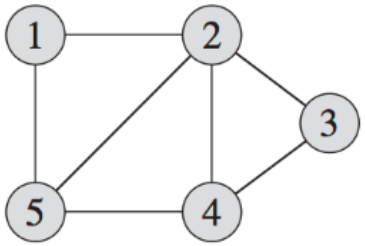
- Ein Array (oder eine verkettete Liste) mit allen Knoten
- Einträge in diesem Knotenarray (oder der Liste):
  - Verkettete Listen (Arrays) mit allen Kanten des Knoten

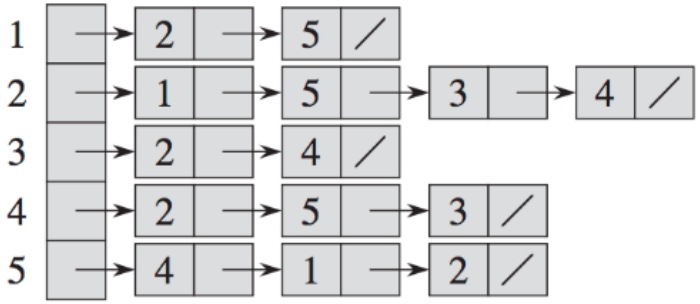
Eigenschaften

- Speichereffizient bei dünn besetzten Graphen
- Speichereffizienz immer asymptotisch optimal
  - aber bei dicht besetzten Graphen trotzdem deutlich schlechter
- Abfragen nach bestimmten Kanten nicht besonders schnell
  - Falls nötig, eine zusätzliche Datenstruktur (z.B. Hashtabelle) anlegen
- Für viele Algorithmen, die “richtige” Datenstruktur
- Z.B. für Tiefensuche (und Breitensuche)

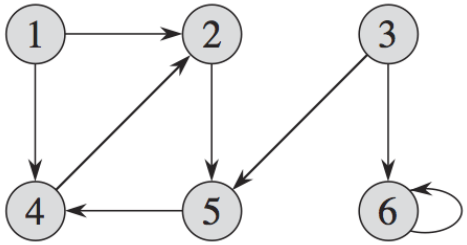
Beispiele

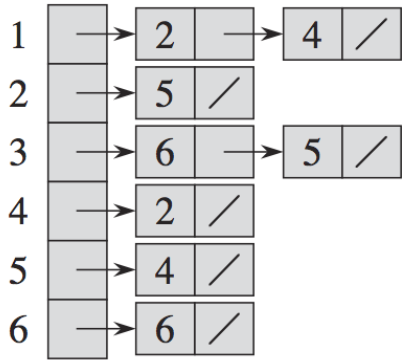
Beispiele aus [CLRS]:





	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0





	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Graph-Traversierung

UNI FREIBURG

Graph-Traversierung (Graph-Exploration) informell

- Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$, besuche "systematisch" alle Knoten, welche von s aus erreichbar sind.
- Das haben wir bereits bei den Binärbäumen gesehen
- Wie bei den Bäumen gibt es zwei grundsätzliche Verfahren

- **Breitensuche (BFS = breadth first search)**
  - zuerst "in die Breite" (nähere Knoten zu s zuerst)

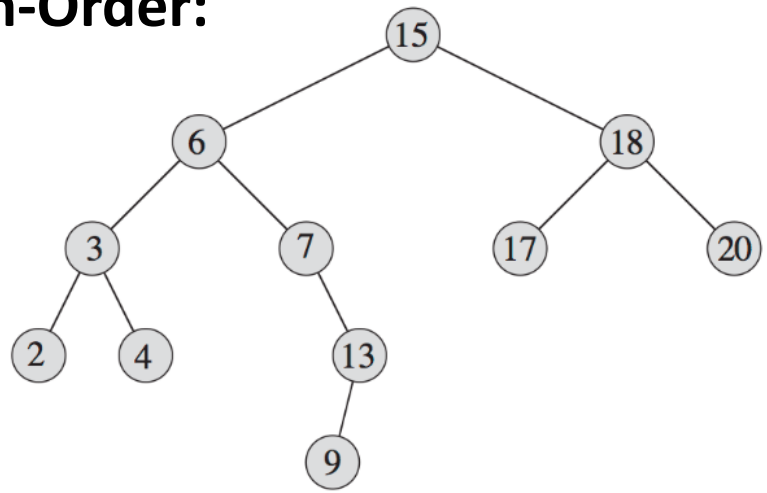
- **Tiefensuche (DFS = depth first search)**
  - zuerst "in die Tiefe" (besuche alles, was an einem Knoten u "dranhängt", bevor der nächste Nachbar von u besucht wird)

- Graph-Traversierung ist wichtig, da es oft als Subroutine auftaucht
  - z.B., um die Zusammenhangskomponenten eines Graphen zu finden
  - Wir werden einige Beispiele sehen…

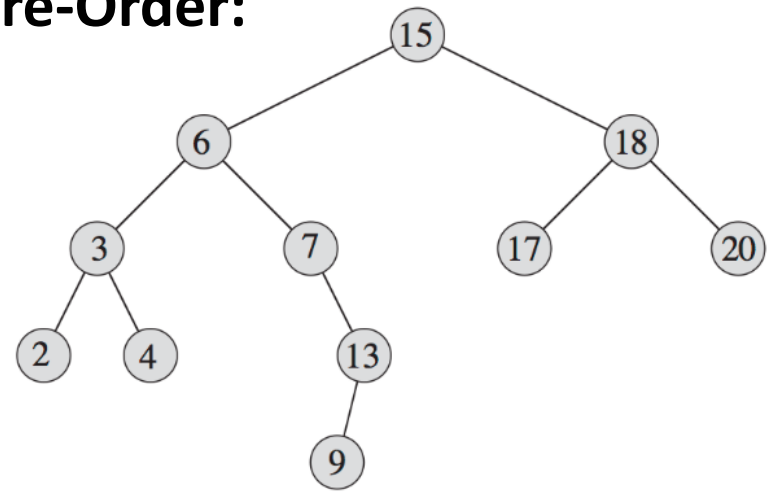
Traversieren eines binären Suchbaums

Ziel: Besuche alle Knoten eines binären Suchbaums einmal

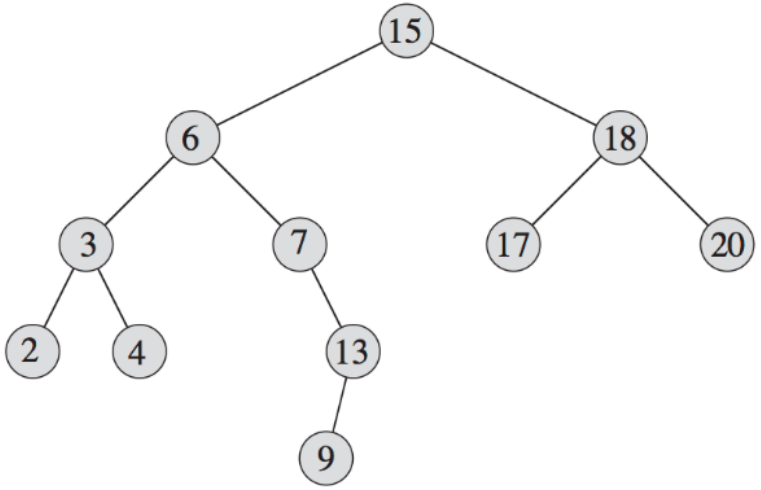
In-Order:



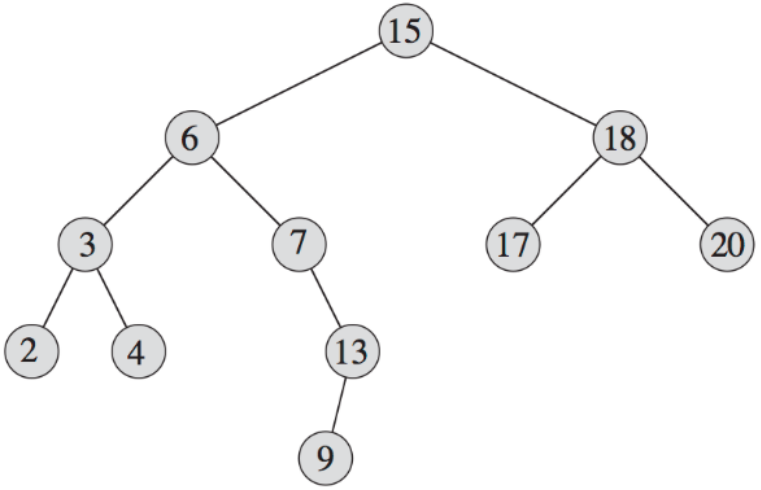
Pre-Order:



Post-Order:



Level-Order:



Tiefensuche / DFS Traversierung

```
preorder(node):
    if node != null
        visit(node)
        preorder(node.left)
        preorder(node.right)

inorder(node):
    if node != null
        inorder(node.left)
        visit(node)
        inorder(node.right)

postorder(node):
    if node != null
        postorder(node.left)
        postorder(node.right)
        visit(node)
```

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Funktioniert nicht so einfach rekursiv wie die Tiefensuche
- Lösung mit einer Warteschlange:
  - Wenn ein Knoten besucht wird, werden seine Kinder in die Queue eingereiht

```
BFS-Traversal:
    Q = new Queue()
    Q.enqueue(root)
    while not Q.empty() do
        node = Q.dequeue()
        visit(node)
        if node.left != null
            Q.enqueue(node.left)
        if node.right != null
            Q.enqueue(node.right)
```

Breitensuche von allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Unterschiede Binärbaum T $\Leftrightarrow$ allg. Graph G

- Graph G kann Zyklen haben
- In T haben wir eine Wurzel und kennen von jedem Knoten die Richtung zur Wurzel
  - etwas allgemeiner bezeichnen wir solche Bäume auch als gewurzelte Bäume

Breitensuche in Graph G (Start bei Knoten $s \in V$)

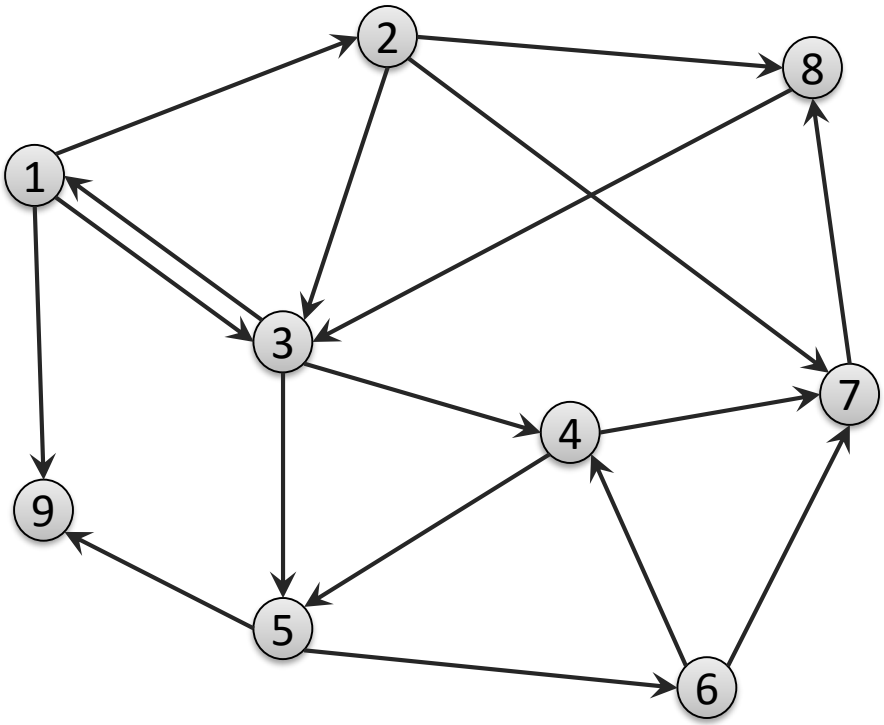
- **Zyklen: markiere** Knoten, welche man schon gesehen hat
- **Markiere** Knoten s, hänge s in die Queue
- Wie bisher, nehme immer den ersten Knoten u aus der Queue:
  - **besuche Knoten u**
  - Gehe durch die Nachbarn v von u
    Falls v nicht markiert, markiere v und hänge v in Queue
    Falls v markiert ist, muss nichts getan werden

Breitensuche (BFS Traversierung)

- Am Anfang ist $v.\mathrm{marked}$ bei allen Knoten v auf **false** gesetzt

```
BFS-Traversal(s):
    for all u in V: u.marked = false;
    Q = new Queue()
    s.marked = true
    Q.enqueue(s)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                Q.enqueue(v)
```

Breitensuche Beispiel



Analyse Breitensuche

In der Folge benennen wir die Knoten folgendermaßen

- weiße Knoten: Knoten, welche der Alg. noch nicht gesehen hat
- graue Knoten: markierte Knoten
  - Knoten werden grau, wenn sie in die Warteschlange eingefügt werden
  - Knoten sind grau, solange sie in der Warteschlange sind
- schwarze Knoten: besuchte Knoten
  - Knoten werden schwarz, wenn sie aus der Warteschlange genommen werden

Analyse Breitensuche

Die Laufzeit der BFS-Traversierung ist $O(n+m)$.

- weiße Knoten: Knoten, welche der Alg. noch nicht gesehen hat
- graue Knoten: markierte Knoten
- schwarze Knoten: besuchte Knoten

Bäume, Spannbäume

UNI FREIBURG

Baum:

- Ein zusammenhängender, ungerichteter Graph ohne Zyklen
  - bzw. auch ein gerichteter Graph, aber dann darf es auch ohne Berücksichtigug der Richtungen keine Zyklen haben

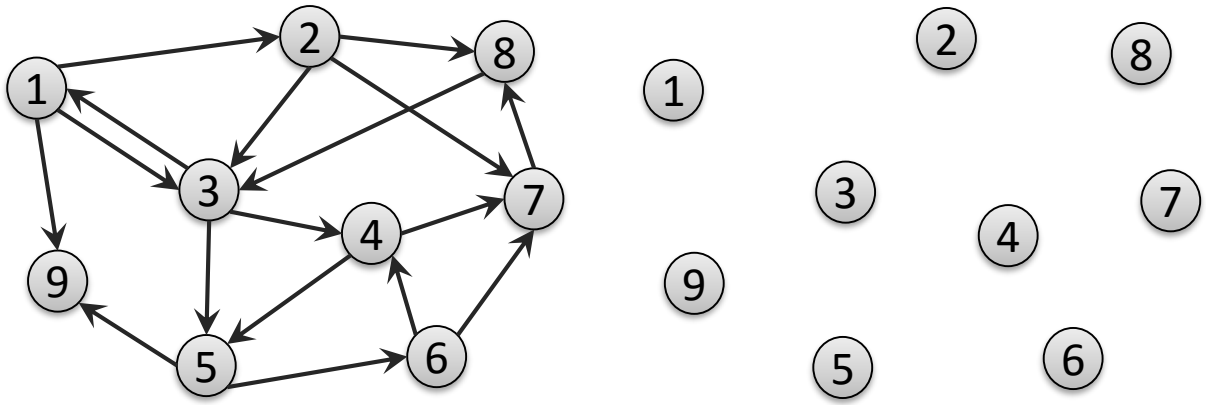
Spannbaum eines Graphen G:

- Ein Teilgraph T, so dass T ein Baum ist, welcher alle Knoten von G enthält
  - Teilgraph: Teilmenge der Knoten und Kanten, welche einen Graph ergeben

BFS Baum

Mit der BFS-Traversierung können wir folgendermaßen einen Spannbaum generieren (falls G zusammenhängend ist):

- Jeder Knoten u merkt sich, von welchem Knoten v aus er markiert wurde
- Der Knoten v ist dann der Parent-Knoten von u
  - Da jeder Knoten genau einmal markiert wird, ist der Parent von jedem Knoten eindeutig definiert, s ist die Wurzel und hat keinen Parent.



BFS Baum: Pseudocode

- Wir merken uns zusätzlich die Distanz zu s im Baum

```
BFS-Tree(s):
    Q = new Queue();
    for all u in V: u.marked = false;
    s.marked = true;
    s.parent = NULL;
    s.d = 0
    Q.enqueue(s)
    while not Q.empty() do
        u = Q.dequeue()
        visit(u)
        for v in u.neighbors do
            if not v.marked then
                v.marked = true;
                v.parent = u;
                v.d = u.d + 1;
                Q.enqueue(v)
```

Analyse Breitensuche

Im BFS-Baum eines ungewichteten Graphen ist die Distanz von jedem Knoten u zur Wurzel s gleich $d_G(s,u)$.

- Baumdistanz zur Wurzel: $d_T(s,u) = u.d$
- Wir müssen also zeigen, dass $u.d = d_G(s,u)$
- Wir zeigen zuerst, dass $\boldsymbol{u.d \geq d_G(s,u)}$

Analyse Breitensuche

Lemma: Annahme: Während BFS-Traversal ist Zustand der Queue

$$Q = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle \ (v_1\text{: head}, v_r\text{: tail})$$

Dann gilt $v_r.d \leq v_1.d + 1$ und $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ (für $i = 1, \dots, r-1$)

Beweis:

Analyse Breitensuche

Im BFS-Baum eines ungewichteten Graphen ist die Distanz von jedem Knoten u zur Wurzel s gleich $d_G(s,u)$.

Tiefensuche in allgemeinen Graphen

UNI FREIBURG

Grundidee Tiefensuche in G (Start bei Knoten $s \in V$)

- **Markiere Knoten v** (am Anfang ist $v = s$)
- Besuche die Nachbarn von v der Reihe nach *rekursiv*
- Nachdem alle Nachbarn besucht sind, **besuche s**

- **rekursiv:** Beim Besuchen der Nachbarn werden deren Nachbarn besucht, und dabei deren Nachbarn, etc.
- **Zyklen in G:** Besuche jeweils nur Knoten, welche noch nicht markiert sind

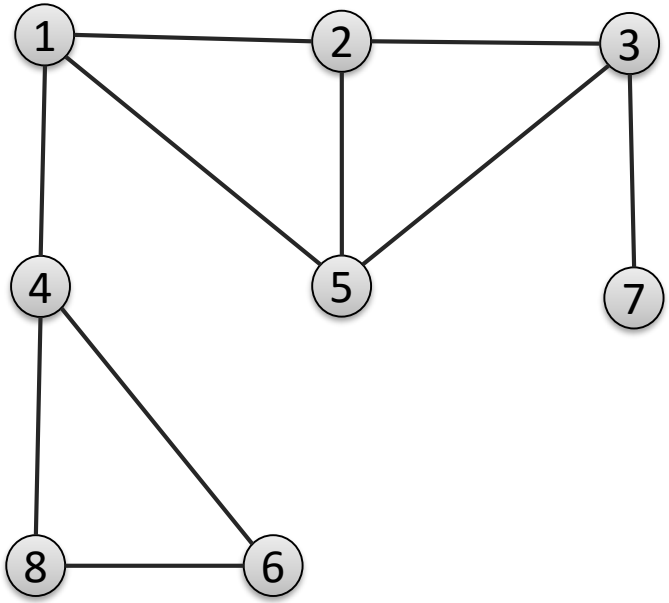
- entspricht der Postorder-Traversierung in Bäumen
- Fall man gleich beim Markieren den Knoten besucht, entspricht es der Preorder-Traversierung

Tiefensuche: Pseusocode

```
DFS-Traversal(s):
    for all u in V: u.color = white;
    DFS-visit(s, NULL)

DFS-visit(u, p):
    u.color = gray;
    u.parent = p;
    for all v in u.neighbors do
      if v.color = white
        DFS-visit(v, u)
    visit node u;
    u.color = black;
```

Tiefensuche: Beispiel



Tiefensuche: Analyse

In der gleichen Art wie bei der Breitensuche, kann man auch bei der Tiefensuche einen Spannbaum konstruieren

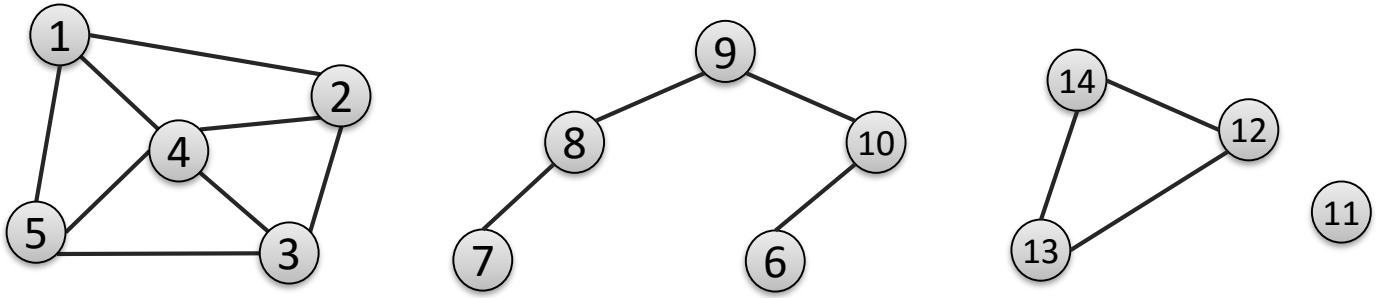
- Die Eigenschaften dieses DFS-Baums werden wir noch anschauen

Die Laufzeit der Tiefensuche (DFS-Traversierung) ist $O(n+m)$.

- Wir färben die Knoten weiß, grau und schwarz wie vorher
  - nicht markiert = weiß, markiert = grau, besucht = schwarz

Zusammenhangskomponenten

- Die Zusammenhangskomponenten (oder einfach Komponenten) eines Graphen sind seine zusammenhängenden Teile.



Ziel: Finde alle Komponenten eines Graphen.

```
for u in V do
    if not u.marked then
        start new component
        explore with DFS/BFS starting at u
```

- Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen können in $O(n+m)$ Zeit identifiziert werden. (mit Hilfe von DFS oder BFS)