Informatik II - SS 2016

(Algorithmen & Datenstrukturen)

Vorlesung 17 (22.6.2016)

Graphenalgorithmen V (Kürzeste Wege)

UNI FREIBURG

Fabian Kuhn

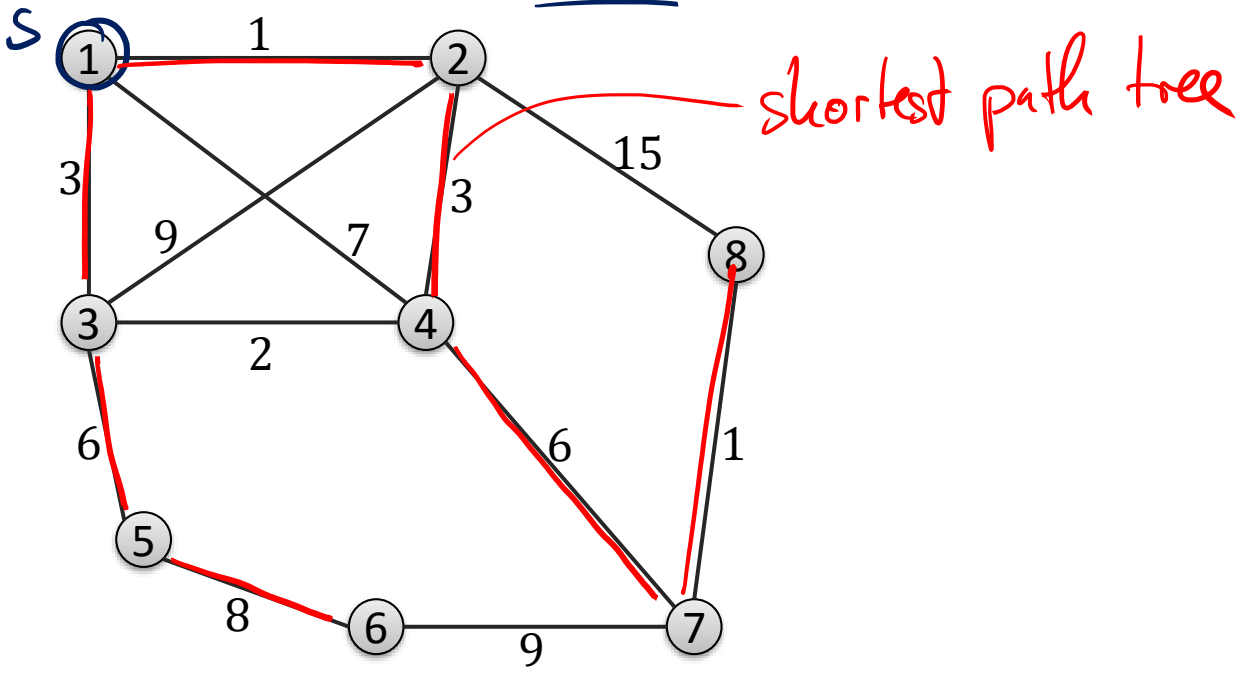
Algorithmen und Komplexität

Kürzeste Wege

Problem

kann gerichtet sein

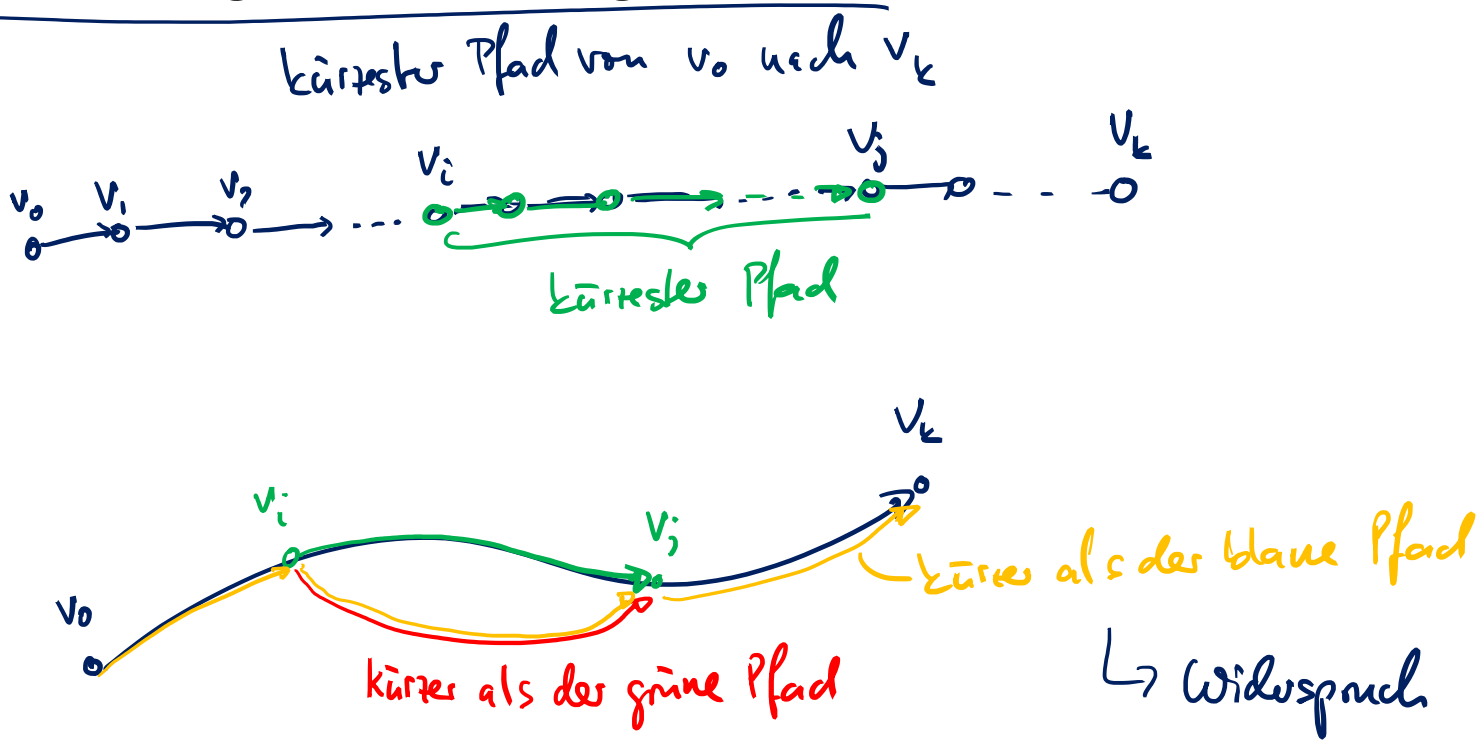
- Gegeben: gewichteter Graph $G = (V, E, w)$, Startknoten $s \in V$
  - Wir bezeichnen Gewicht einer Kante (u, v) als $w(u, v)$
  - Annahme: $\forall e \in E: w(e) \geq 0$
- Ziel: Finde kürzeste Pfade / Distanzen von s zu allen Knoten
  - Distanz von s zu v: $d_G(s, v)$ (Länge eines kürzesten Pfades)



Optimalität von Teilpfaden

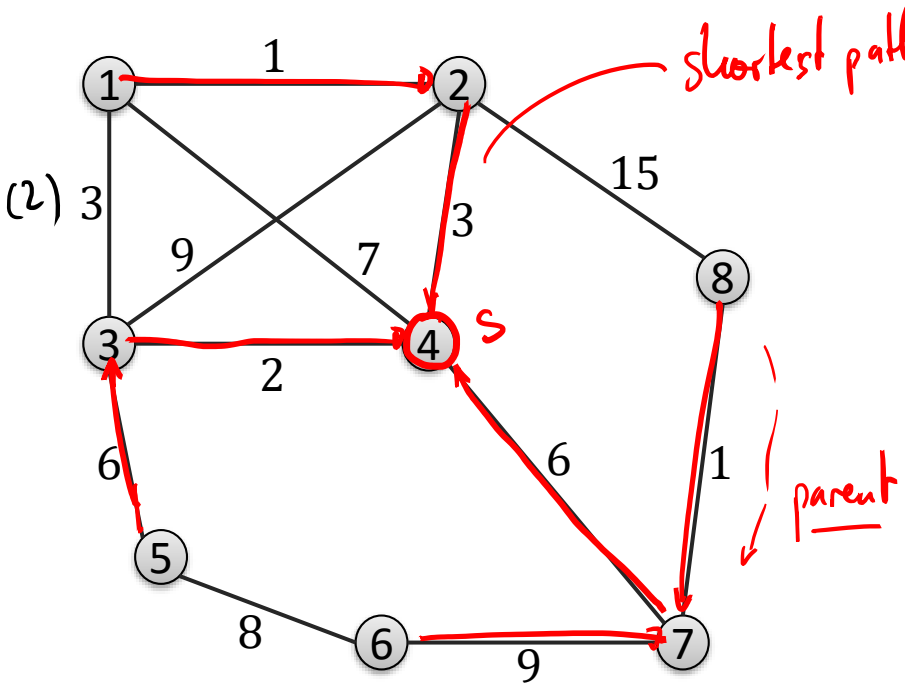
Lemma: Falls $v_0, v_1, \dots, v_k$ ein kürzester Pfad von v_0 nach v_k ist, dann gilt für alle $0 \leq i \leq j \leq k$, dass der Teilpfad $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j ist.

- gilt auch bei negativen Kantengewichten...



Shortest-Path Tree

- Im Knoten s gewurzelter Spannbaum, welcher kürzeste Pfade von s zu allen Knoten enthält.
  - Einen solchen Baum gibt es immer (folgt insb. aus der Opt. der Teilpfade)
- Bei ungewichteten Graphen: BFS-Spannbaum
- **Ziel:** Finde einen "Shortest Path Tree"



Wir wollen für alle Knoten v $d_G(s,v)$ und den Parent von v im (in einem) shortest path tree finden.

Dijkstras Algorithmus: Idee

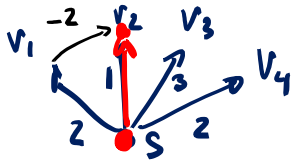
- Algorithmus von Edsger W. Dijkstra (1959 publiziert)

Idee: Annahme: $w(e) \geq 0$

- Wir starten bei s und bauen schrittweise den Spannbaum auf

> **Invariante:**
> Algorithmus hat zu jeder Zeit einen bei s gewurzelten Teilbaum eines "Shortest Path Tree".

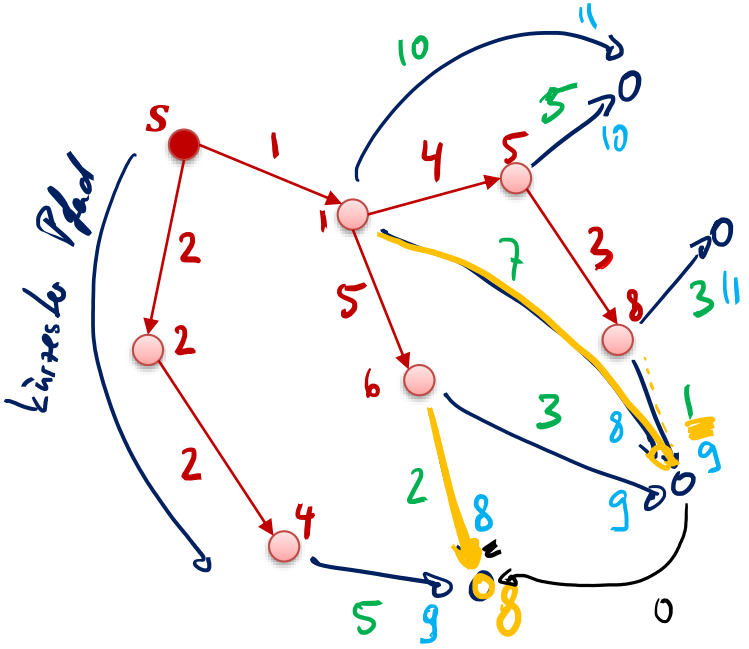
- Ziel: In jedem Schritt des Algorithmus einen Knoten hinzufügen
  - Am Anfang: Teilbaum besteht nur aus s (erfüllt Invariante trivialerweise...)
  - 1. Schritt: Wegen der Optimalität der Teilpfade, muss es einen kürzesten Pfad bestehend aus nur einer Kante geben...
  - Füge Knoten mit kleinstem Abstand ~~zu~~ von s zum Baum hinzu



Dijkstras Algorithmus: Ein Schritt

Gegeben: Einen in s gewurzelten Baum T, so dass T Teilbaum eines "Shortest Path Tree" von s in G ist.

Wie können wir T um einen Knoten erweitern?



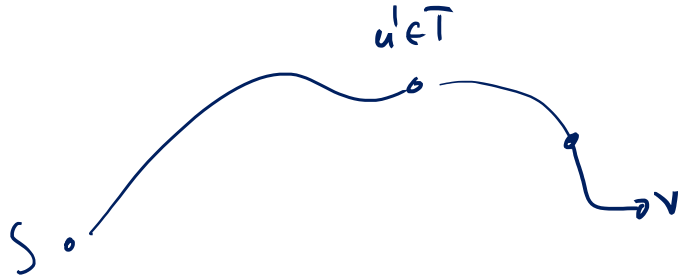
u im Baum T, $v \notin T$ Kante (u,v)

$d_G(s,v) \leq d_G(s,u) + w(u,v)$

$u \in T$

Nehme Knoten $v \notin T$, Kante (u,v),

so dass $d_G(s,u) + w(u,v)$ minimiert wird

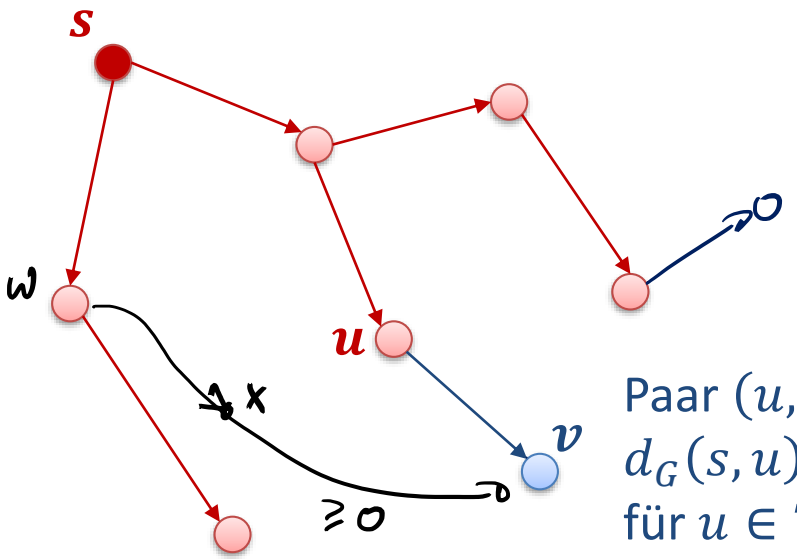


Dijkstras Algorithmus: Ein Schritt

Gegeben: T ist Teilbaum eines "Shortest Path Tree" von s in G ist.

Lemma: Für die Kante (u, v) mit $u \in T$ und $v \notin T$, welche $d_G(s, u) + w(u, v)$ minimiert, gilt:

$$\boldsymbol{d_G(s, v) = d_G(s, u) + w(u, v)}$$



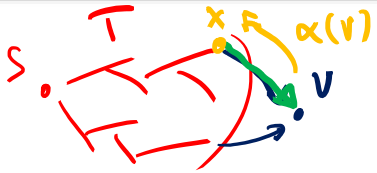
funktioniert nur bei nicht neg. Kantengew.

Paar (u, v) minimiert $d_G(s, u) + w(u, v)$ für $u \in T, v \notin T$

$$d_G(s,w) + w(w,x) \geq d_G(s,u) + w(u,v)$$

Dijkstras Algorithmus

Invariante:
Algorithmus hat zu jeder Zeit einen bei s gewurzelten Teilbaum eines "Shortest Path Tree" T.



- Am Anfang ist $T = (\{s\}, \emptyset)$
- Für jeden Knoten $v \notin T$ berechnet man zu jedem Zeitpunkt

$$\delta(s,v) := \min_{u \in T \cap N_{\text{in}}(v)} d_G(s,u) + w(u,v)$$

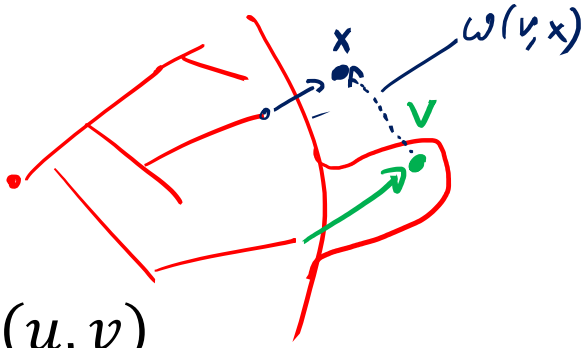
  - sowie den Eingangsnachbar $u =: \alpha(v)$, welcher den Ausdruck minimiert...
- Invariante $\Longrightarrow \delta(s,v) \geq d_G(s,v)$
- Lemma auf letzter Folie:

  Für das minmale $\delta(s,v)$ gilt: $\boldsymbol{\delta(s,v) = d_G(s,v)}$

Dijkstras Algorithmus

Initialisierung $T = (\emptyset, \emptyset)$

- $\delta(s,s) = 0$, sowie $\delta(s,v) = \infty$ für alle $v \in V \setminus S$
- $\alpha(v) = \text{NULL}$ für alle $v \in V \setminus S$ (braucht's nicht für s)



Interationsschritt

- Wähle Knoten v mit kleinstem

$$\delta(s,v) := \min_{u \in T \cap N_{\text{in}}(v)} d_G(s,u) + w(u,v)$$

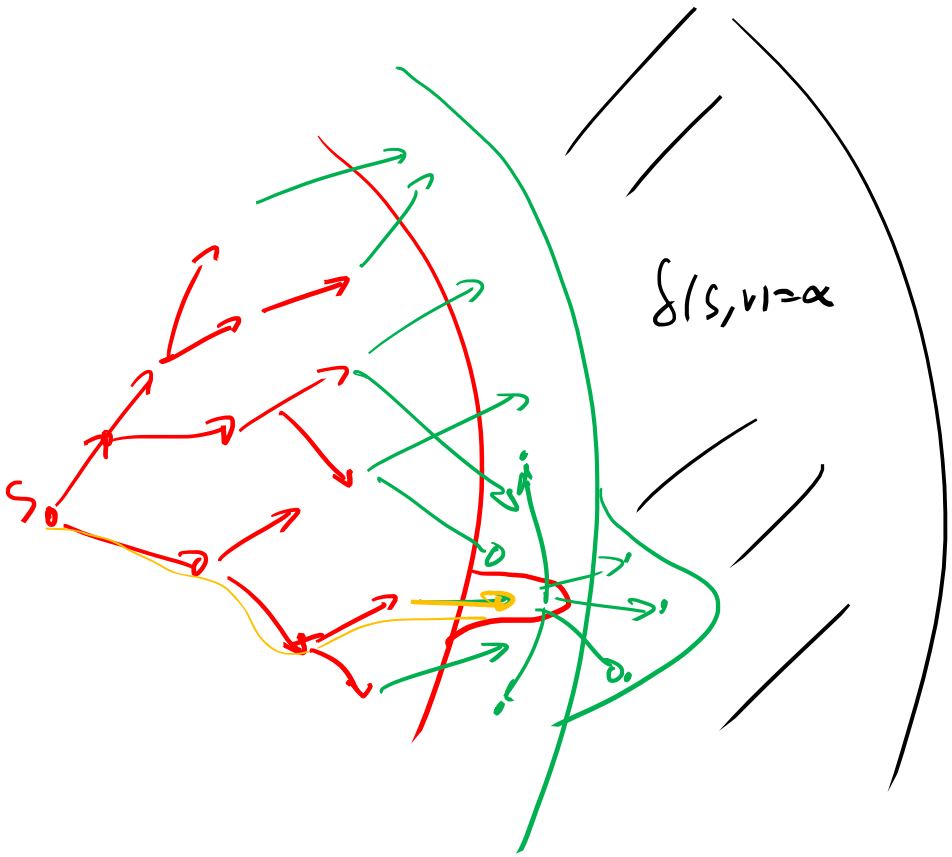
- Gehe durch die ausgehenden Nachbarn $x \in V \setminus T$ und setze

$$\delta(s,x) := \min\{\delta(s,x), \delta(s,v) + w(v,x)\}$$

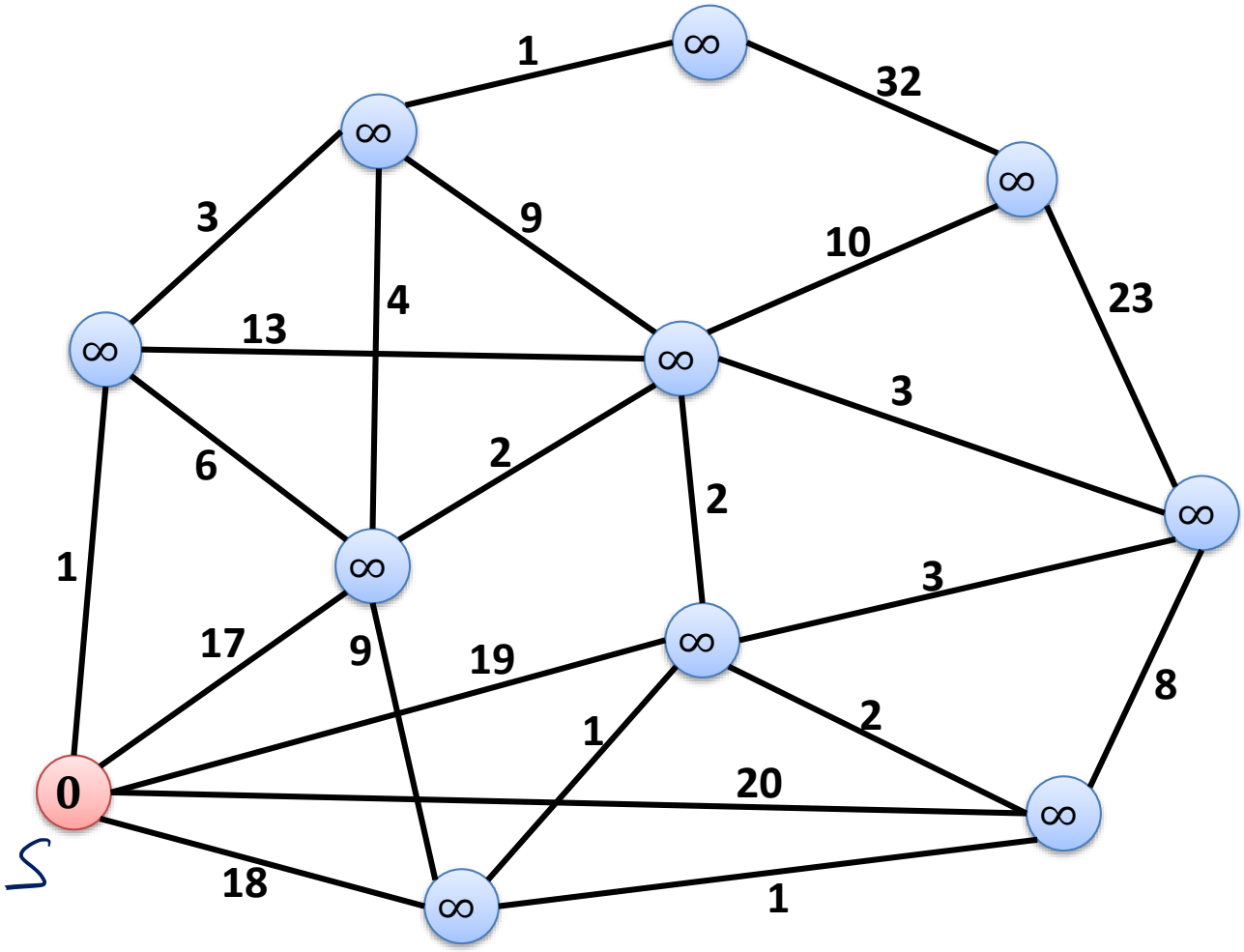
  - Falls nötig, setze auch $\alpha(x) = v$

- Füge Kante $(\alpha(v), v)$ zum Baum T hinzu.

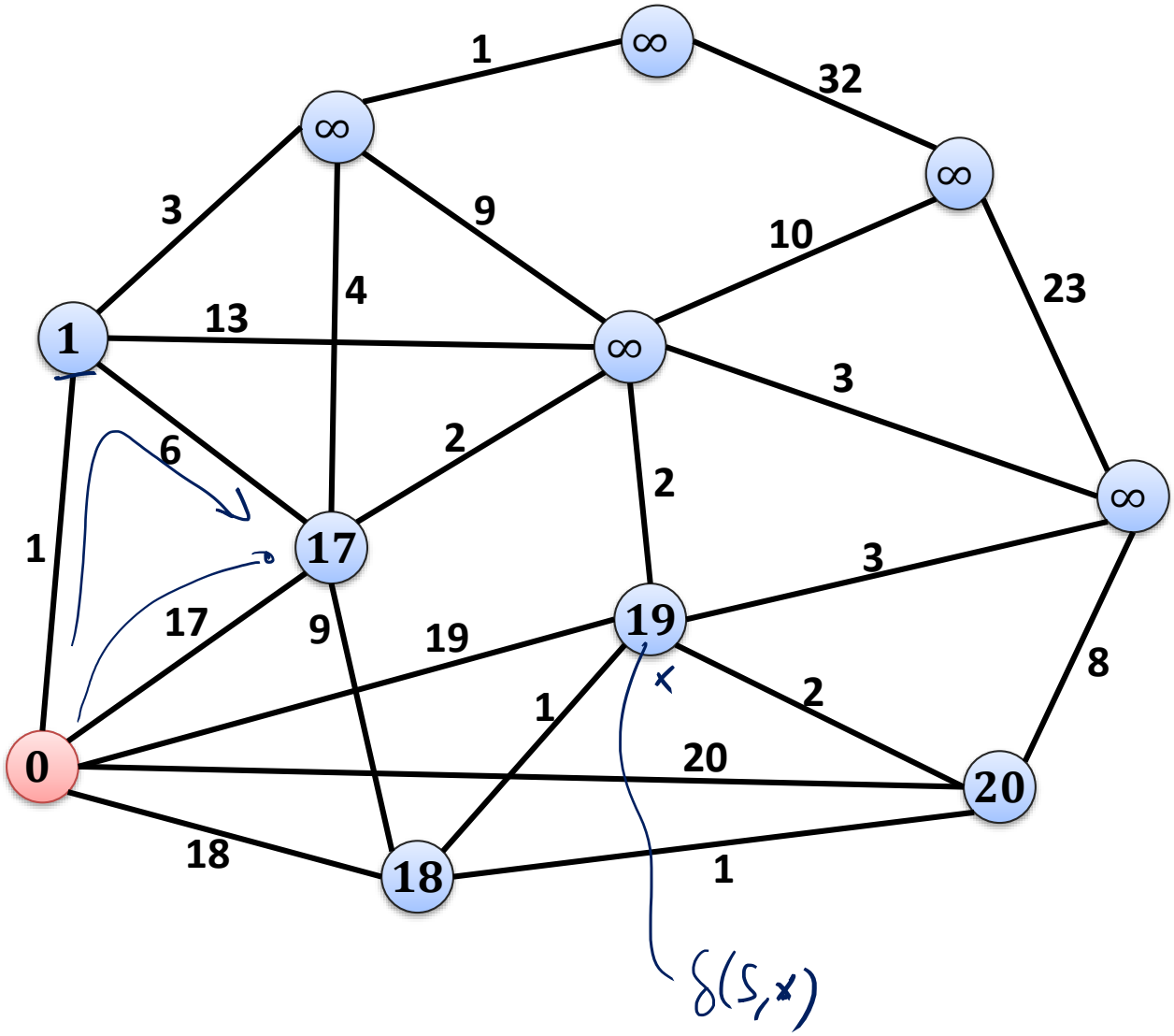
Dijkstras Algorithmus



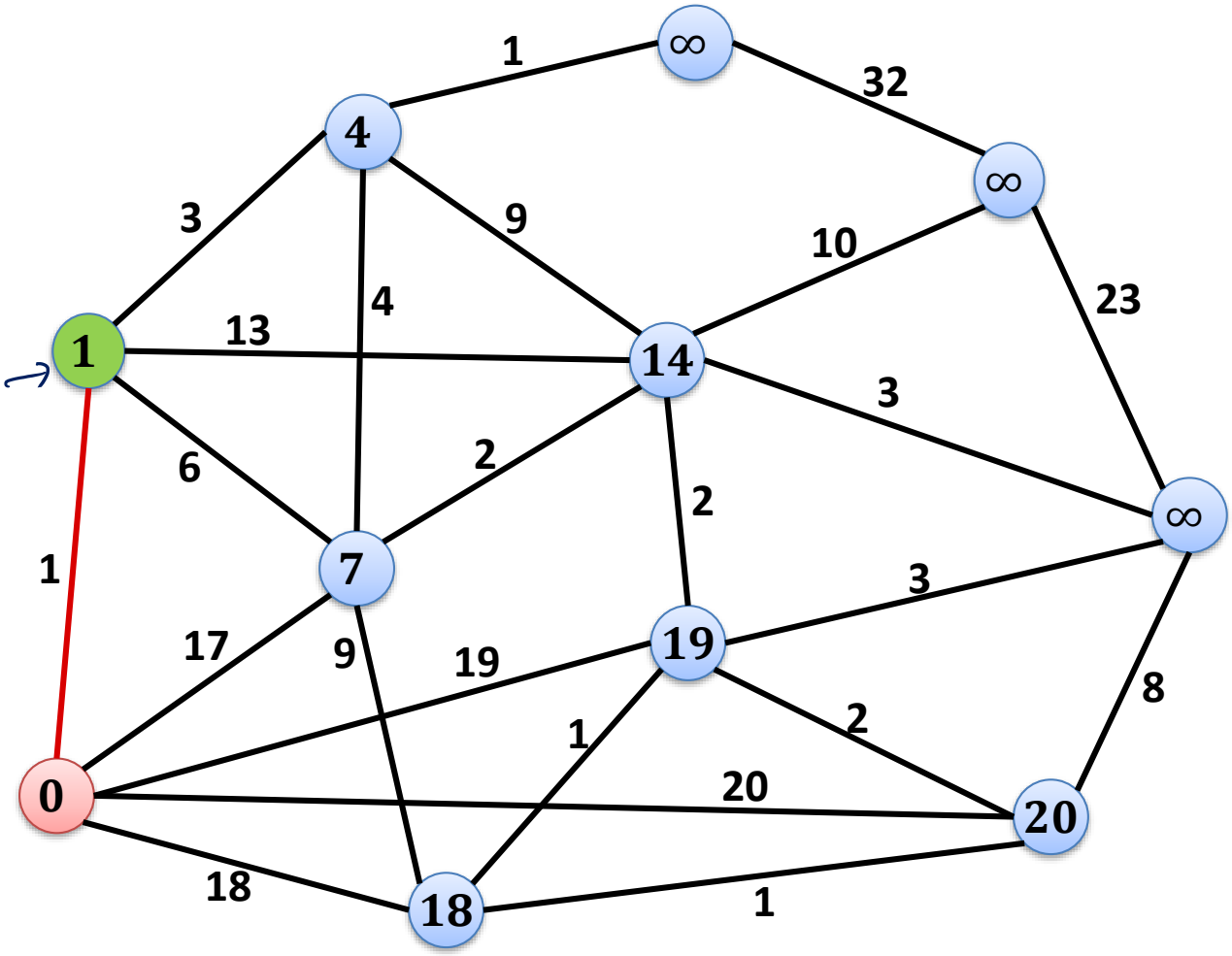
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



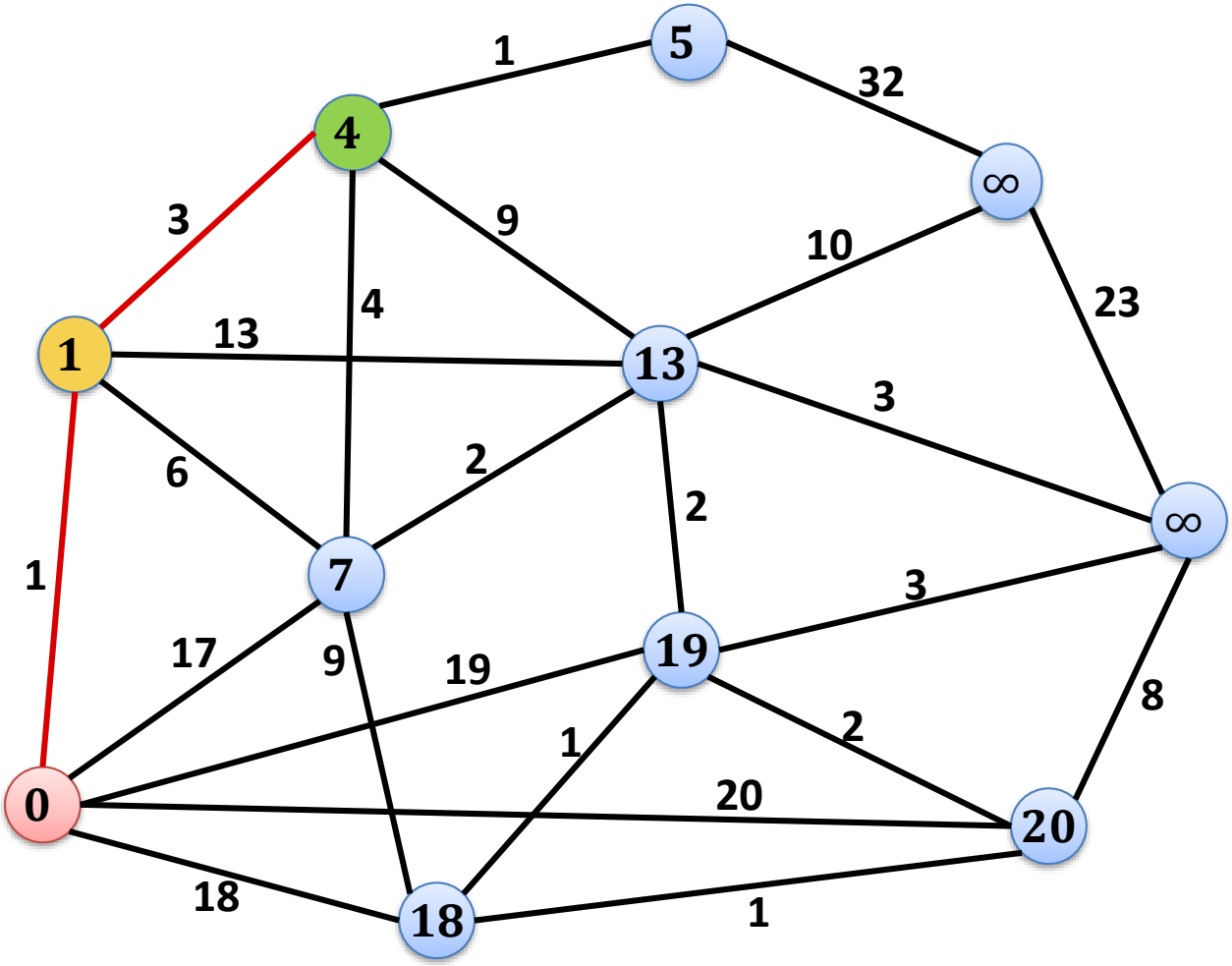
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



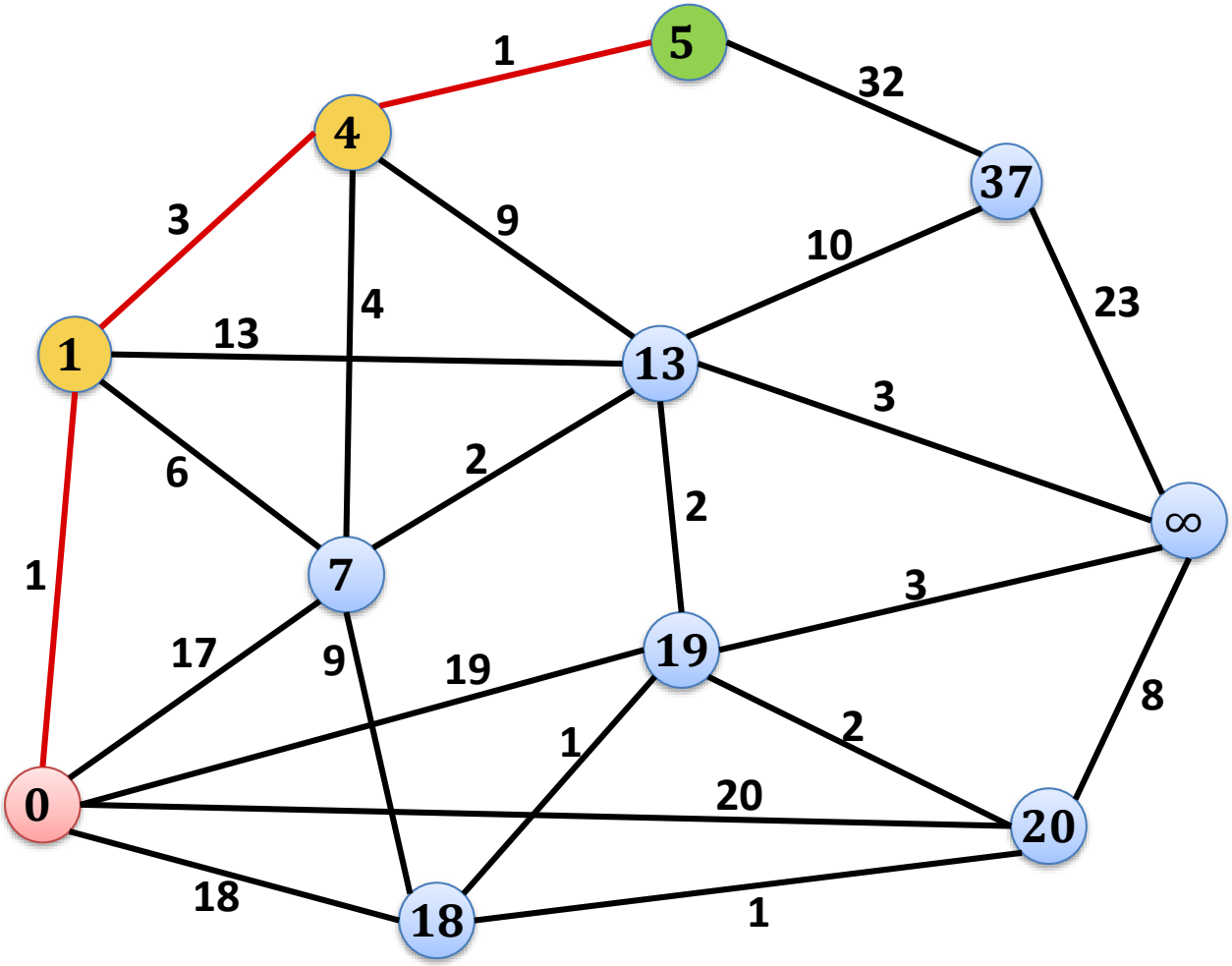
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



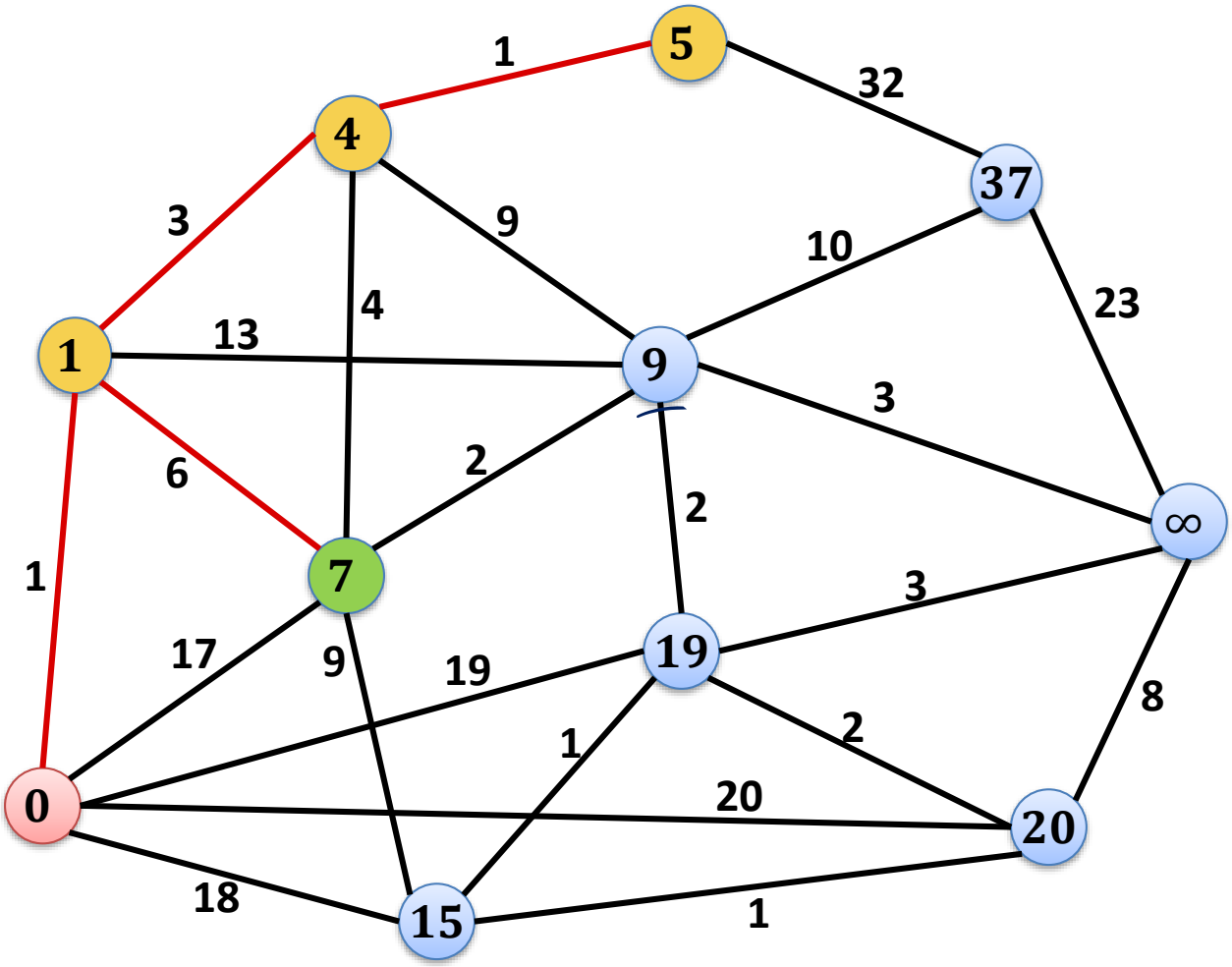
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



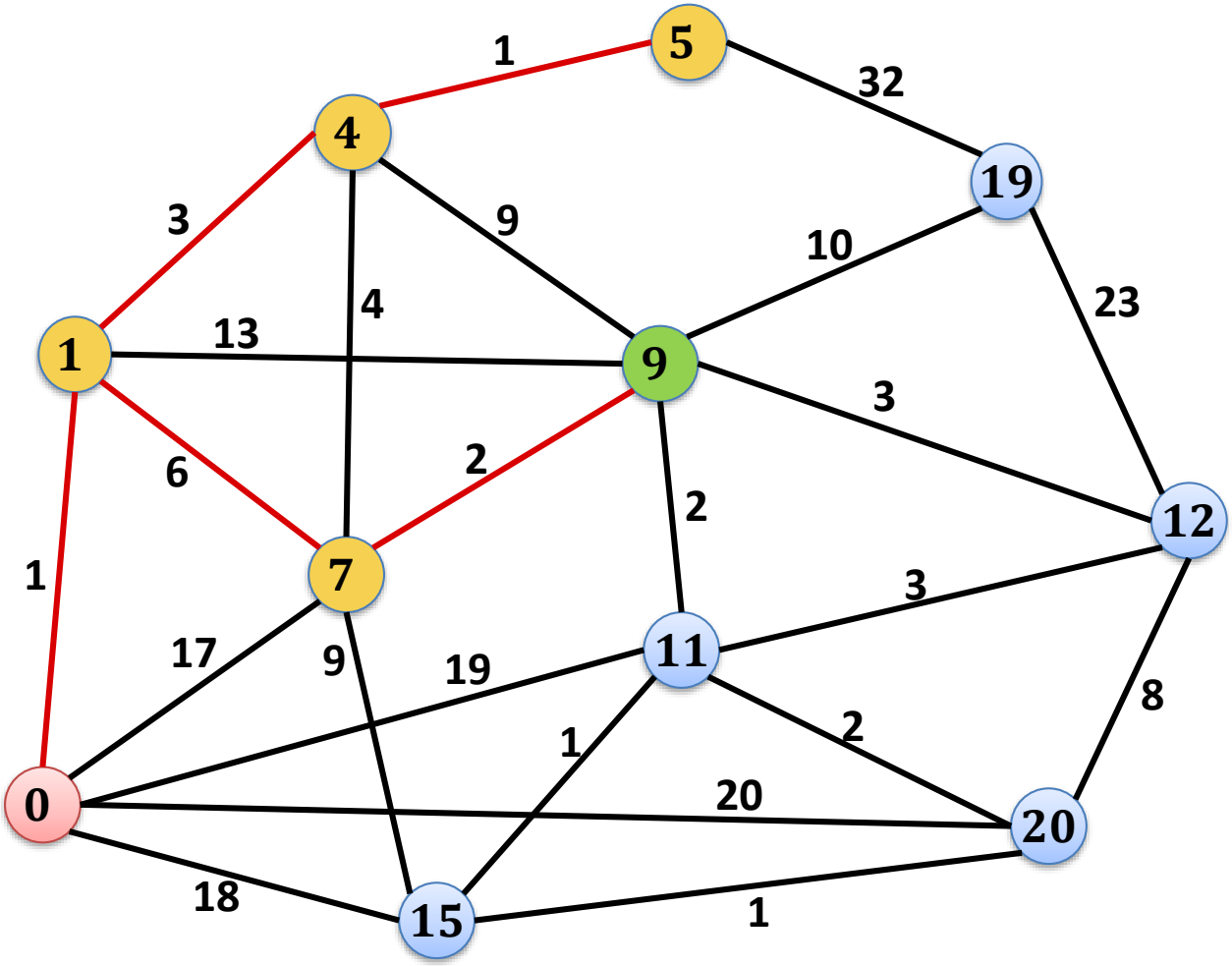
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



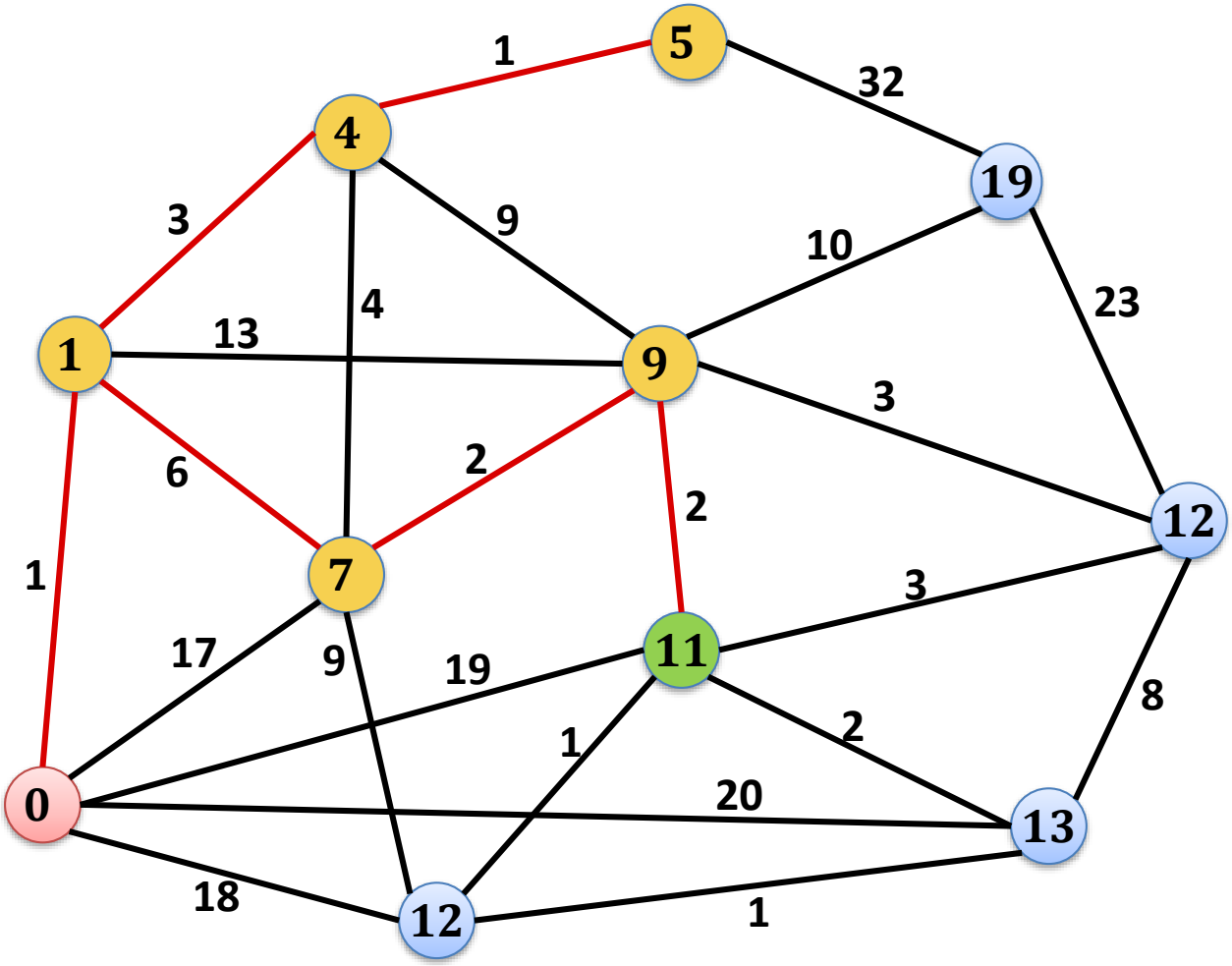
Dijkstras Algorithmus: Beispiel



Dijkstras Algorithmus: Beispiel



Dijkstras Algorithmus: Beispiel



Dijkstras Algorithmus: Implementierung

Initialisierung $T = (\emptyset, \emptyset)$

- $\delta(s,s) = 0$, sowie $\delta(s,v) = \infty$ für alle $v \in V \setminus S$
- $\alpha(v) = \text{NULL}$ für alle $v \in V \setminus S$ (braucht's nicht für s)

Interationsschritt

- Wähle Knoten v mit kleinstem

$$\delta(s,v) := \min_{u \in T \cap N_{\text{in}}(v)} d_G(s,u) + w(u,v)$$

- Gehe durch die ausgehenden Nachbarn $x \in V \setminus T$ und setze

$$\delta(s,x) := \min\{\delta(s,x), \delta(s,v) + w(v,x)\}$$

  - Falls nötig, setze auch $\alpha(x) = v$

- Füge Kante $(\alpha(v), v)$ zum Baum T hinzu.

Erinnerung: Prioritätswarteschlangen

UNI FREIBURG

Heap / Priority Queue:

- Verwaltet eine Menge von *(key,value)*-Paaren

Operationen:

- *create* : erzeugt einen leeren Heap
- *H.insert(x, key)* : fügt Element *x* mit Schlüssel *key* ein
- *H.getMin()* : gibt Element mit kleinstem Schlüssel zurück
- *H.deleteMin()* : löscht Element mit kleinstem Schlüssel (gibt Element mit kleinstem Schlüssel zurück)
- *H.decreaseKey(x, newkey)* : Falls *newkey* kleiner als der aktuelle Schlüssel von *x* ist, wird der Schlüssel von *x* auf *newkey* gesetzt

Erinnerung: Prims MST Algorithmus

UNI FREIBURG

H = new priority queue; $A = \emptyset$
for all $u \in V \setminus \{s\}$ **do**
    H.insert(u, ∞); $\alpha(u)$ = NULL
H.insert(s, 0)

while H is not empty **do**
    u = H.deleteMin()
    for all unmarked neighbors v of u **do**
        if $w(\{u,v\}) < d(v)$ **then**
            H.decreaseKey(v, $w(\{u,v\})$)
            $\alpha(v) = u$
    if $u \neq s$ **then** $A = A \cup \{\{u, \alpha(u)\}\}$

Dijkstras Algorithmus: Implementierung

H = new priority queue; $A = \emptyset$

for all $u \in V \setminus \{s\}$ **do**

    H.insert(u, ∞); $\delta(s,u) = \infty$; $\alpha(u)$ = NULL

H.insert(s, 0)

while H is not empty **do**

    u = H.deleteMin()

    for all neighbors v of u **do**

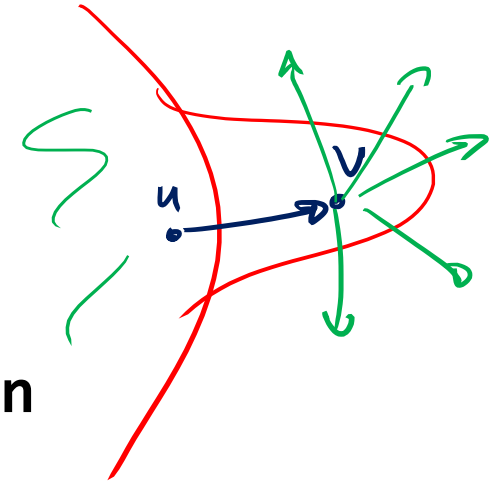
        if $\delta(s,u) + w(u,v) < \delta(s,v)$ **then**

            $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$

            H.decreaseKey(v, $\delta(s,v)$)

            $\alpha(v) = u$

    if $u \neq s$ **then** $A = A \cup \{\{u, \alpha(u)\}\}$



in priority queue:
alle Knoten, welche noch nicht in T sind

Dijkstas Algorithmus: Laufzeit

- Algorithmus-Implementierung ist fast identisch, wie diejenige von Prims MST Algorithmus

- **Anzahl Heap-Operationen:**

  create: 1, insert: n, deleteMin: n, decreaseKey: $\leq m$

- **Laufzeit mit binären Heaps:**

  $$O(m \log n)$$

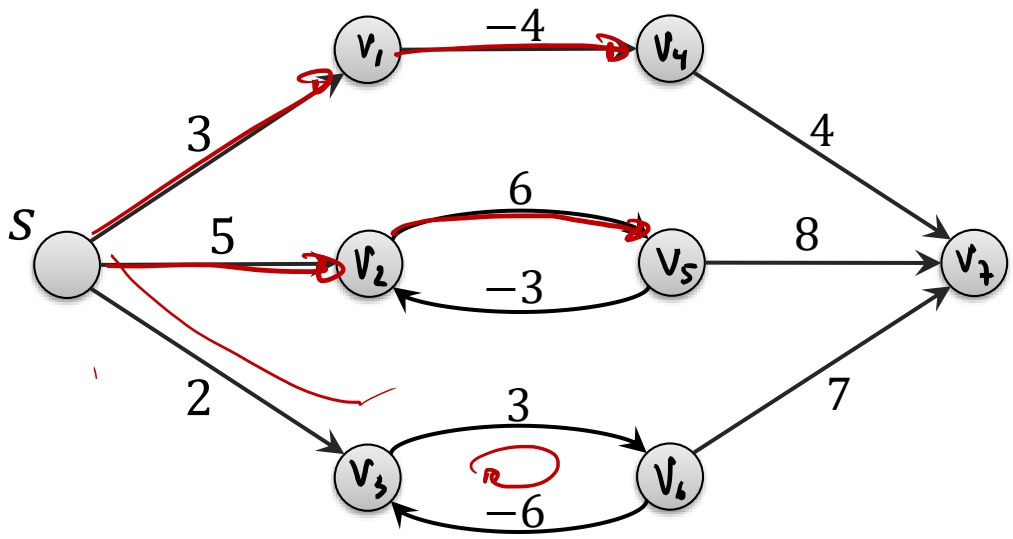
- **Laufzeit mit Fibonacci Heaps:**

  $$O(m + n \log n)$$

Negative Kantengewichte

- Kürzeste Pfade können auch in Graphen mit negativen Kantengewichten definiert werden

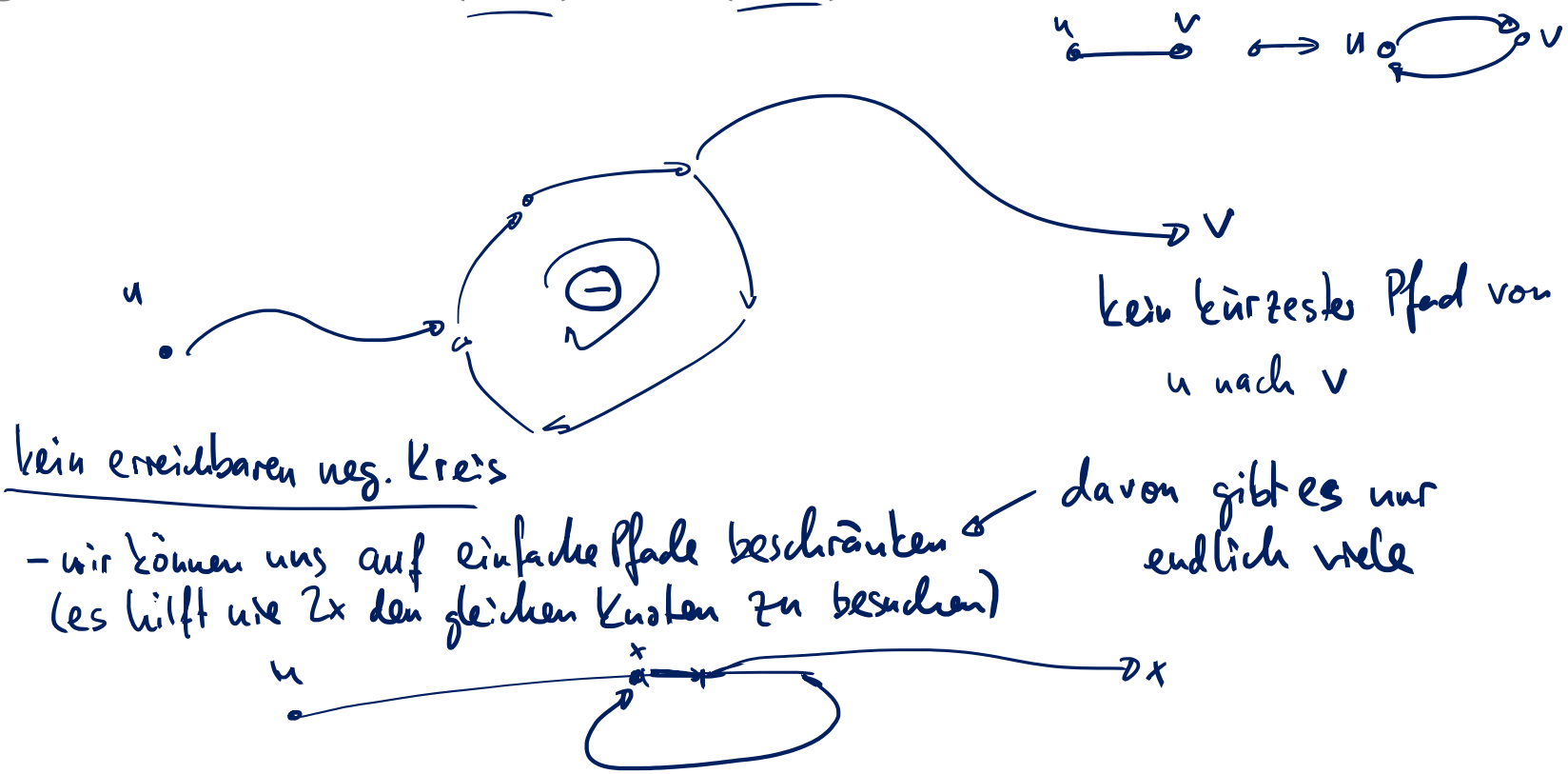
Beispiel



Negative Kantengewichte

Satz: In einem gerichteten, gewichteten Graphen G hat es genau dann einen kürzesten Pfad von u nach v, falls es keinen negativen Kreis gibt, welcher von u erreichbar ist und von welchem v erreichbar ist.

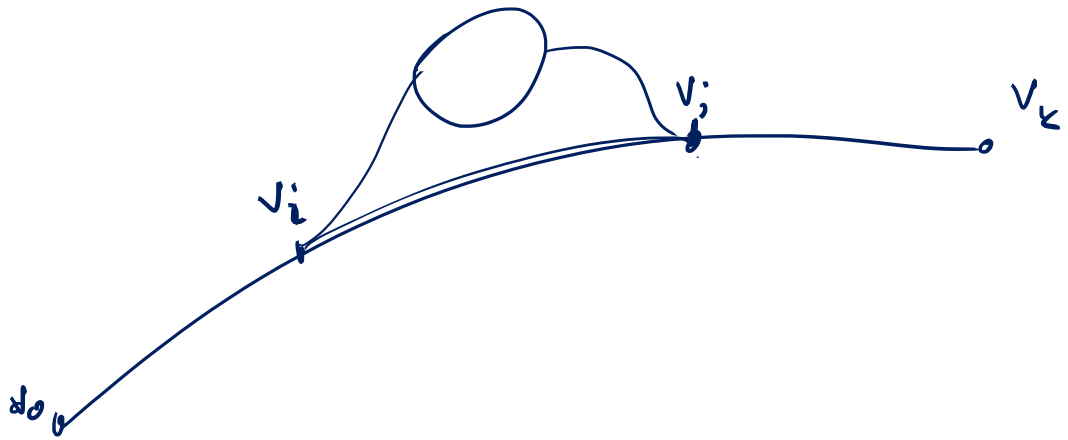
- gilt auch für ungerichtete Graphen, falls Kanten $\{u, v\}$ als 2 gerichtete Kanten (u, v) und (v, u) betrachtet werden



Optimalität von Teilpfaden

Lemma: Falls $v_0, v_1, \dots, v_k$ ein kürzester Pfad von v_0 nach v_k ist, dann gilt für alle $0 \leq i \leq j \leq k$, dass der Teilpfad $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ ein kürzester Pfad von v_i nach v_j ist.

- **gilt auch bei negativen Kantengewichten...**



Zur Erinnerung: Dijkstras Algorithmus

- Algorithmus kennt zu jedem Zeitpunkt einen Teilbaum T' eines Shortest Path Trees
- Man merkt sich zudem für jeden Knoten, wie er über ≤ 1 Kante von T' am besten erreicht werden kann und nimmt in jedem Schritt den besten solchen Knoten zu T' hinzu.

Dijkstras Algorithmus

Initialisierung $T = (\emptyset, \emptyset)$

- $\delta(s,s) = 0$, sowie $\delta(s,v) = \infty$ für alle $v \in V \setminus S$
- $\alpha(v) = \text{NULL}$ für alle $v \in V \setminus S$ (braucht's nicht für s)

Interationsschritt

- Wähle Knoten v mit kleinstem

$$\delta(s,v) := \min_{u \in T \cap N_{\text{in}}(v)} d_G(s,u) + w(u,v)$$

- Gehe durch die Ausgangsnachbarn $x \in V \setminus T$ und setze

$$\delta(s,x) := \min\{\delta(s,x), \delta(s,v) + w(v,x)\}$$

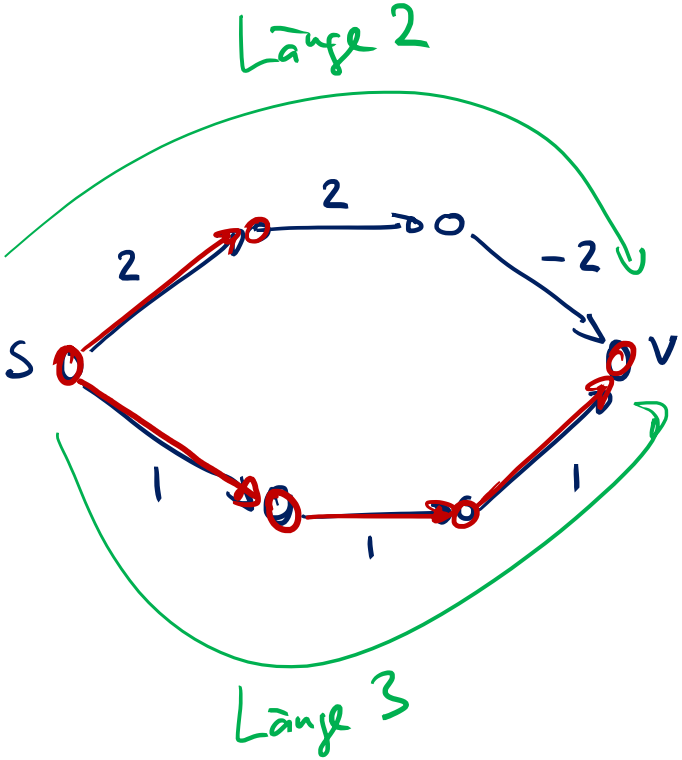
  - Falls nötig, setze auch $\alpha(x) = v$

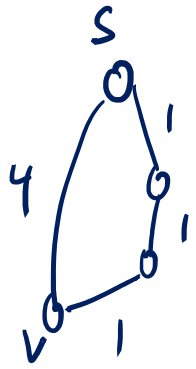
- Füge Kante $(\alpha(v), v)$ zum Baum T hinzu.

Dijkstras Algorithmus und negative Gewichte

Funktioniert Dijkstras Algorithmus auch bei negativen Kantengewichten?

- Antwort: nein





Bellman-Ford Algorithmus

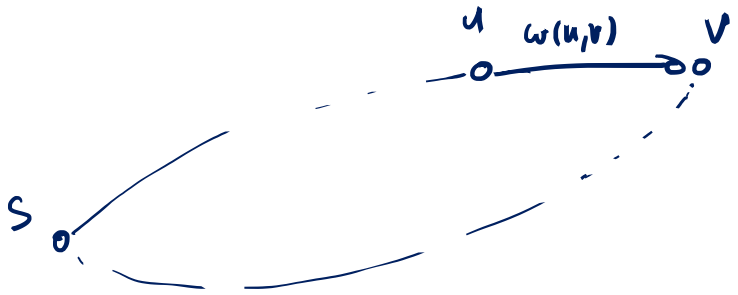
- Zur Vereinfachung, berechnen wir nur die Distanzen $d_G(s,v)$

Annahme:

- Für alle Knoten v: Algorithmus hat Wert $\boldsymbol{\delta(s,v) \geq d_G(s,v)}$
- Initialisierung: $\delta(s,s) = 0$, $\delta(s,v) = \infty$ für $v \neq s$

Beobachtung:

- Falls $(u,v) \in E$, so dass $\delta(s,u) + w(u,v) < \delta(s,v)$, dann können wir $\delta(s,v)$ verkleinern, da $\boldsymbol{d_G(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)}$.



$d_G(s,u) \leq \delta(s,u)$

$d_G(s,v) \leq \delta(s,v)$

Bellman-Ford

- Betrachte alle Kanten (u,v) und versuche $\delta(s,v)$ zu verbessern
  - solange, bis alle Distanzen korrekt sind ($\forall v \in V: \delta(s,v) = d_G(s,v)$)

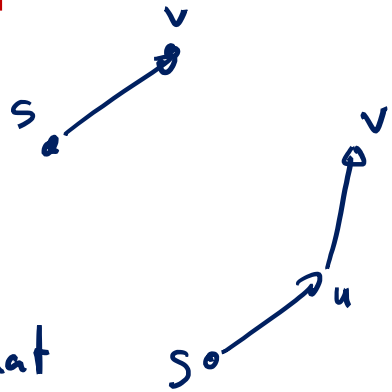
repeat

  for all $(u,v) \in E$ **do**

    if $\delta(s,u) + w(u,v) < \delta(s,v)$ **then**

      $\delta(s,v) := \delta(s,u) + w(u,v)$

until $\forall v \in V: \ \delta(s,v) = d_G(s,v)$



- Wieviele Wiederholungen sind nötig?

Falls kürzester Pfad von s nach v nur 1 Kante hat

$\rightarrow \delta(s,v) = d_G(s,v)$ nach 1 Iteration

Fall kürzester Pfad von s nach v ≤ 2 Kanten hat

$\rightarrow \delta(s,v) = d_G(s,v)$ nach 2 Iterationen

Bellman-Ford

- Betrachte alle Kanten (u,v) und versuche $\delta(s,v)$ zu verbessern
  - solange, bis alle Distanzen korrekt sind ($\forall v \in V: \delta(s,v) = d_G(s,v)$)

```
for i := 1 to n-1 do
    for all (u,v) ∈ E do
        if δ(s,u) + w(u,v) < δ(s,v) then
            δ(s,v) := δ(s,u) + w(u,v)
```

Nach i Wiederholungen ist $\boldsymbol{\delta(s,v) \leq d_G^{(i)}(s,v)}$, wobei $d_G^{(i)}(s,v)$ die Länge des kürzesten Pfades aus höchstens i Kanten bezeichnet.

per Induktion nach i

$$d_G^{(n-1)}(s,v) = d_G(s,v)$$