Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Übungsblatt 3

Abgabe: 01.06, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1: Eulersche und Hamiltonsche Kreise *(10 Punkte)*

Betrachten Sie im Folgenden einfache, ungerichtete, zusammenhängende Graphen. Beweisen oder widerlegen Sie.

a) Nach dem **Satz von Euler** kann ein 3-regulärer Graph niemals Eulersch sein. Kann ein solcher Graph dennoch Hamiltonsch sein? *(1 Punkt)*

b) Der Komplementgraph (siehe Übungsblatt 2) eines Eulerschen Graphen ist ebenso Eulersch. *(1 Punkt)*

c) Ein Graph ist Eulersch genau dann, wenn man seine Kantenmenge als disjunkte Vereinigung von Kreisen schreiben kann (Sprich, $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \dots$ wobei jedes C_i die Kanten eines (einfachen) Kreises enthält). *(3 Punkte)*

d) Sei v_0 der Start/Endknoten eines Hamiltonschen Kreises C. Wenn es eine Kante e gibt die nicht in C vorkommt, kann es keinen Eulerschen Kreis geben der bei v_0 beginnt. *(1 Punkt)*

e) Wenn G Eulersch ist, dann ist der Line-Graph $L(G)$ Hamiltonsch. *(2 Punkte)*

f) Wir definieren den Abstand $\text{dist}(u, v)$ zwischen zwei Knoten u und v als die Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v. Der Durchmesser eines Graphen G ist definiert als

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \text{dist}(u, v) \ .$$

Ist G Eulersch, so gilt $\text{diam}(G) \leq n/2$. *(2 Punkte)*

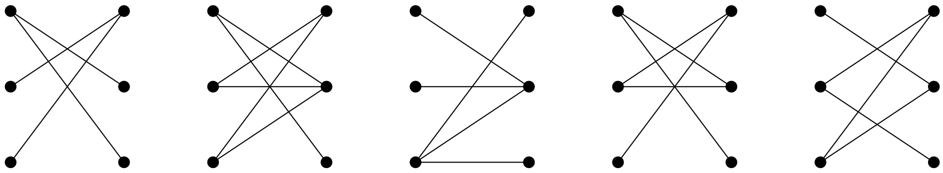
Aufgabe 2: Gerichtete Hamiltonkreise *(2.5 Punkte)*

Wir definieren Hamiltonkreise in gerichteten Graphen analog zum ungerichteten Fall: Sei G ein gerichteter Graph. Ein (gerichteter) Kreis K in G heißt Hamiltonsch, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.

Sei Hamiltonkreis das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener *ungerichteter* Graph einen Hamiltonkreis hat und Gerichteter Hamiltonkreis das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener *gerichteter* Graph einen Hamiltonkreis hat. Zeigen Sie, dass das Problem Hamiltonkreis NP-schwer ist. Sie dürfen nutzen, dass das Problem Gerichteter Hamiltonkreis NP-schwer ist.

Aufgabe 3: Bäume und Wälder *(2.5 Punkte)*

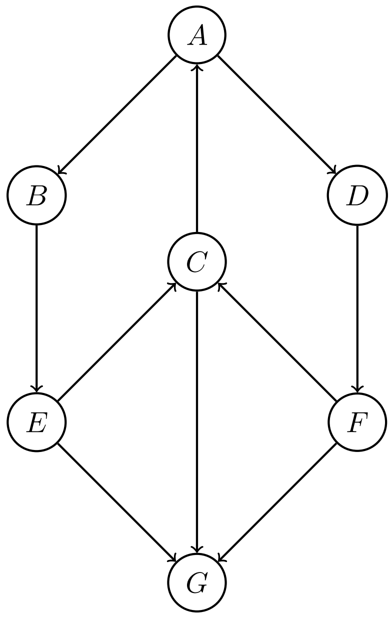
Geben Sie zu jedem der folgenden Graphen an ob es sich um einen Wald bzw. einen Baum oder nichts von beidem handelt.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4 (e) G_5

Aufgabe 4: Tiefensuche *(5 Punkte)*

Gegeben sei folgender Graph



a) Führen Sie eine Tiefensuche auf dem Graphen mit Startknoten A aus. Falls Sie die Wahl zwischen mehreren Knoten haben, wählen Sie als Nachfolgeknoten jeweils den alphabetisch kleinsten. Geben Sie $d[v]$ und $f[v]$ für jeden Knoten v an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie alle Baumkanten (tree edges), Rückwärtskanten (backward edges), Vorwärtskanten (forward edges) und Kreuzkanten (cross edges) an. *(1 Punkt)*

c) Kann man im Allgemeinen aus der Discovery Time bzw. der Finishing Time eine topologische Sortierung des Graphen berechnen? Wenn ja, wie würden Sie vorgehen? *(2 Punkte)*