Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

# Graphentheorie
# Sommersemester 2021
# Übungsblatt 4

Abgabe: 15.06, 16:00 Uhr.

## Aufgabe 1: Breitensuchen und Tiefensuche *(6 Punkte)*

a) Die Tiefensuche (Algorithmen 7.1 und 7.2) konstruiert einen Partialgraph $G_\pi$ welcher den eigentlichen Graphen $G$ in einen Wald aus Wurzelbäumen zerlegt. Kann man mit der Breitensuche (Algorithmen 3.2 und 3.3) auch einen (gerichteten, einfachen, schwach Zusammenhängenden) Graphen $G = (V, R)$ in einen Wald aus Wurzelbäumen zerlegen? Geben Sie an welche Kanten die Baumkanten $R_\pi \subseteq R$ sind und zeigen sie dass hier tatsächlich ein Wald entsteht. *(2 Punkte)*

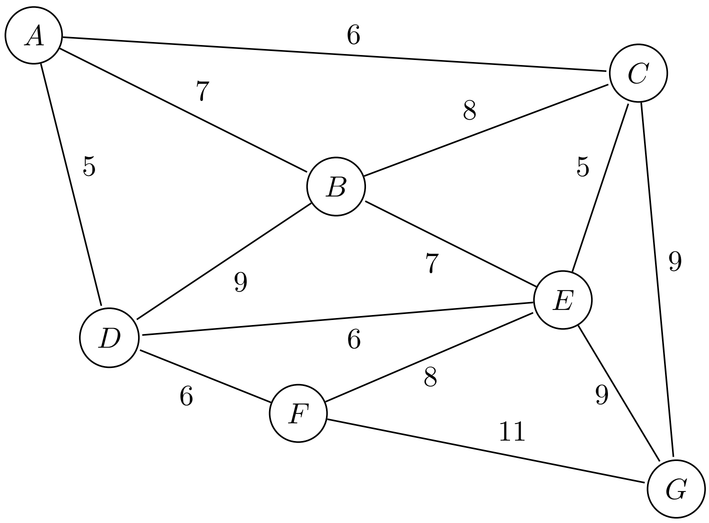
b) Sowohl die Tiefensuche wie auch die Breitensuche kann dazu benutzt werden Spannbäume/Spannwälder in ungerichteten Graphen zu finden. Sei im folgenden ein einfacher ungerichteter Graph $G$ gegeben. Nehmen sie außerdem an dass $G$ zusammenhängend ist, was im ungerichteten Fall impliziert dass die Tiefen- bzw. Breitensuche einen Spannbaum konstruiert.

   Sei $T$ der Spannbaum der entsteht wenn wir eine Tiefensuche ausführen, welche bei einem Knoten $u$ startet. Angenommen die Breitensuche mit gleichem Startknoten $u$ produziert den exakt gleichen Baum $T$. Beweisen Sie dass in diesem Fall $G = T$ gelten muss. *(3 Punkte)*

c) Zeigen Sie dass die Aussage aus $b$) nicht für gerichtete Graphen gilt, selbst wenn alle Knoten vom Startknoten $u$ aus erreichbar sind. *(1 Punkt)*

## Aufgabe 2: MSF *(4 Punkte)*

Betrachten Sie folgenden Graphen $G$:



a) Finden Sie einen minimalen Spannbaum für $G$ mit Hilfe des **Algorithmus von Kruskal**. Geben Sie dafür in jedem Iterationsschritt die Menge $E_F$ an. *(1 Punkt)*

b) Führen Sie den **Algorithmus von Prim** beginnend mit Startknoten $B$ aus. Dabei soll einmal der selbe Spannbaum wie in a) entstehen. Geben Sie auch hier in jedem Schritt die Mengen $S$ und $E_T$ an. *(1 Punkt)*

c) Stellen sie eine eindeutige Sortierung der (Kanten)Kosten bezüglich der Identität der Endknoten her, so dass man den **Algorithmus von Borůvka** ausführen kann.

*Hinweis*: Sie können hierfür die lexikographische Ordnung auf den Knoten nutzen.

Führen Sie anschließend den **Algorithmus von Borůvka** aus (Sie müssen hier keine Zwischenschritte angeben). *(1 Punkt)*

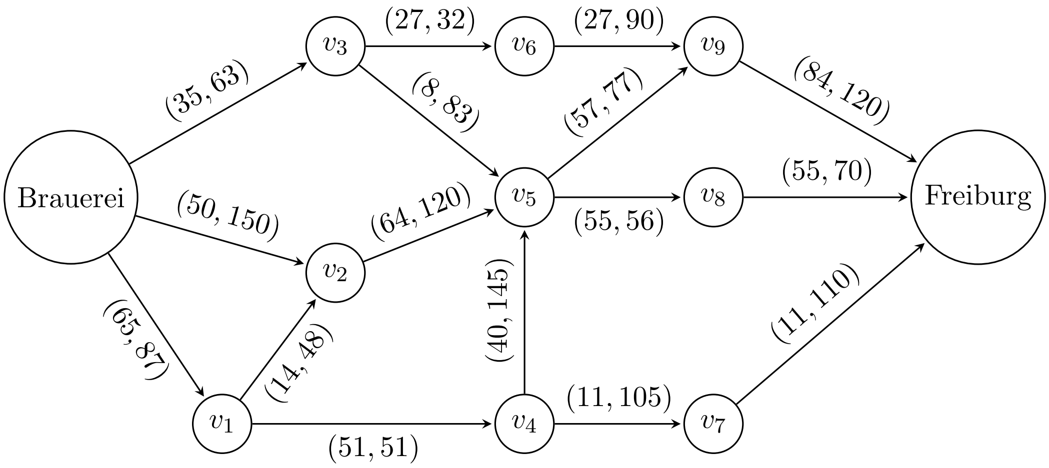
d) Der **Algorithmus von Kruskal** hat eine Laufzeit von $O(m \log m)$. Wie würde sich seine Laufzeit verbessern, wenn die Kantengewichte $c(e_1), ..., c(e_m)$ schon in sortierter Reihenfolge ($c(e_1) \leq c(e_2) \leq ... \leq c(e_m)$) gegeben sind? *(1 Punkt)*

## Aufgabe 3: Eindeutige Minimale Spannwälder *(4 Punkte)*

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit **paarweise verschiedenen** Kantenkosten bezüglich einer Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $G$ einen *eindeutigen* minimalen Spannwald hat.

## Aufgabe 4: Flüsse und Schnitte *(6 Punkte)*

Es ist mitten im Sommer und wie jedes Jahr müssen die Getränke erst einmal von der Brauerei im Schwarzwald zu den Häusern der Studenten gelangen. Doch das Getränke-Verteil-System ist alt und ineffizient. Betrachten Sie den nachfolgenden Graphen, der das Getränke-Verteil-System darstellt. Jede Kante ist mit $(x/X)$ beschriftet, wobei $x$ die Menge an Getränketransportern und $X$ die maximal erlaubte Anzahl an Getränketransportern auf dieser Strecke ist.




a) Wie viele Getränketranporter kommen aktuell in Freiburg an? *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie anhand des Residualnetzes, dass der Fluss nicht maximal ist. *(1 Punkt)*

c) Die Brauerei möchte das Getränke-Verteil-System ausbauen. Diese hat Ihnen hierzu eine Vollmacht ausgestellt, mit der Sie Getränketransporter hinzufügen und umverteilen dürfen. Maximieren sie die Anzahl der in Freiburg ankommenden Getränketransporter, indem sie die neuen Flusswerte angeben. *(3 Punkte)*

d) Geben sie einen minimalen $(Brauerei, Freiburg)$-Schnitt an. *(1 Punkt)*