Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Übungsblatt 6

Abgabe: 13.07., 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Färbung und Taillenweite *(5 Punkte)*

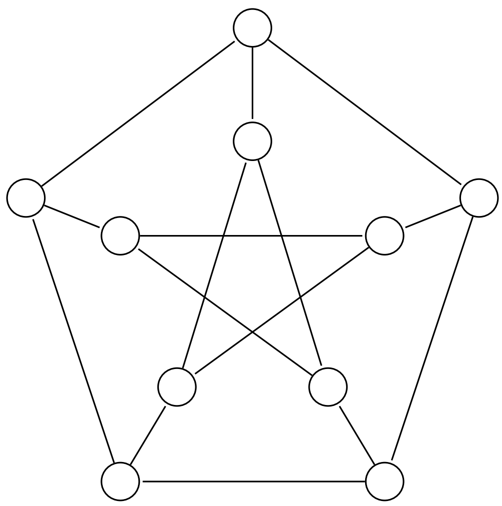

Abbildung 1: Der Petersen-Graph

a) Zeigen Sie dass im Petersen-Graph $\chi(G) = 3$ gilt. Gehen Sie wie folgt vor:

- Geben Sie eine 3-Färbung für G an. *(1 Punkt)*
- Zeigen Sie warum es keine gültige 2-Färbung geben kann. *(1 Punkt)*

b) Welche Taillenweite hat der Petersen-Graph? *(1 Punkt)*

c) Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem einfachen zusammenhängenden Graphen G, welcher (mindestens) einen elementaren Kreis besitzt gilt: $g(G) \leq 2 \cdot \operatorname{diam}(G) + 1$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Taillenweite $g(G)$ von G ist die Länge des kürzesten elementaren Kreises in G. Der Abstand zweier Knoten ist die Länge des kürzesten Weges zwischen diesen Knoten. Der Durchmesser $\operatorname{diam}(G)$ ist der größte Abstand zweier Knoten in G.

Aufgabe 2: Zufallsgraph *(6 Punkte)*

Betrachten Sie den Erdős-Rényi-Graphen $G(n, p)$ mit $n \geq 5$ und $0 < p < 1$. Sei außerdem (S, T) ein Schnitt von G ($S \,\dot\cup\, T = V(G)$) und $c(S) := \sum_{v \in S} |\{\{v, u\} \mid u \in T\}|$ der Wert des Schnittes wenn man die Kapazität jeder Kante auf 1 setzt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Schnittes $\mathbb{E}[c(S)]$ in Abhängigkeit von $|S|$, n und p. *(1 Punkt)*

   Tipp: Überlegen Sie sich zuerst wie groß dieser Erwartungswert bei einem vollständigen Graphen wäre.

b) Zeigen Sie dass für alle möglichen $S \subseteq V(G)$ gilt dass $\mathbb{E}[c(S)] \leq \frac{n^2}{4} \cdot p$. *(2 Punkte)*

c) Schätzen Sie $\mathbb{P}[c(S) \geq 3]$ mithilfe der Markov-Ungleichung ab. Nutzen Sie dafür die Obergrenze des Erwartungswerts aus Aufgabenteil b). *(1 Punkt)*

d) Sei $V' \subseteq V(G)$ eine Knotenmenge mit genau 5 Elementen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist V' eine unabhängige Menge in G? *(1 Punkt)*

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich $G[V']$ mit 4 (oder weniger) Farben färben? *(1 Punkt)*

Aufgabe 3: Die Probabilistische Methode *(3 Punkte)*

Zeigen Sie mithilfe der Probabilistischen Methode folgende Aussage: Jeder einfache ungerichtete und zusammenhängende Graph G mit n Knoten und m Kanten hat einen bipartiten Partialgraph mit mindestens $m/2$ vielen Kanten.
Hinweis: Es gibt 2 Grundprinzipien auf denen die probabilistische Methode basiert:

1. Wenn ein *zufällig gewähltes* Objekt mit einer positiven Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft besitzt, existiert mindestens ein Objekt mit dieser Eigenschaft. Dieses Prinzip kommt mehrfach im Beweis des Satzes von *Erdős* (Foliensatz 17) zum Einsatz.

2. Jede Zufallsvariable nimmt mindestens einen Wert an, der nicht größer ist und mindestens einen Wert, der nicht kleiner ist, als der Erwartungswert dieser Variable. Sprich, es existiert immer ein x für das $E[X] \leq x$ (bzw. $E[X] \geq x$) gilt. Nutzen Sie dieses Prinzip für die Aufgabe!

Aufgabe 4: Union Find *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Implementierung der Union Find Datenstruktur durch Wurzelbäume. Sei `SimpleUnion`(x, y) die Operation, welche die Wurzel des Baums mit Element x an die Wurzel des Baums mit Element y anhängt (d.h. ohne Union by Size).

Vergleichen Sie die Laufzeit von n *MakeSet* gefolgt von m *Union/Find* Operationen für die Implementierung mit `SimpleUnion` bzw. Union by Size (jeweils ohne Path Compression).