Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Musterlösung Übungsblatt 1

Abgabe: 04.05.2021, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1: Gerichtete Graphen *(5 Punkte)*

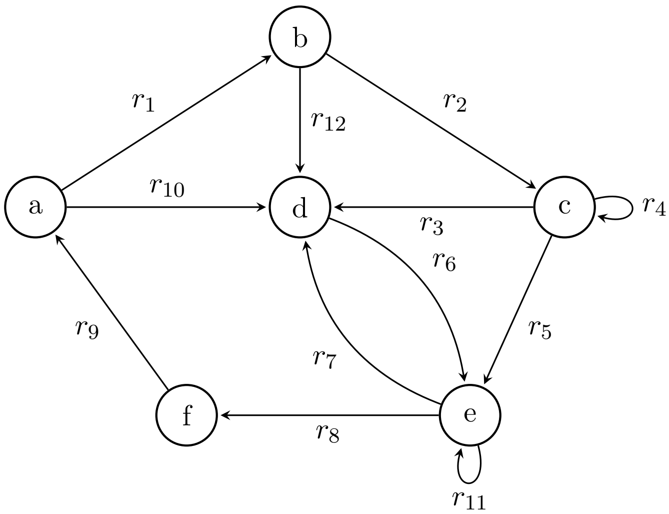


Abbildung 1: Gerichteter Graph G

a) Formalisieren Sie den Graph $G = (V, R, \alpha, \omega)$, sprich, geben Sie sowohl die Mengen V und R an wie auch die Funktionen α und ω.

b) Bestimmen Sie alle Schlingen, Parallelen und Antiparallelen sofern diese vorhanden sind. Ist G einfach?

c) Bestimmen Sie $\delta^+(v), \delta^-(v), N^+(v), N^-(v)$ und $N(v)$ für alle $v \in \{c, d\}$.

d) Bestimmen Sie Innen- und Außengrad von e.

e) Zeichnen Sie den durch die Menge $U = \{c, d, e, f\}$ induzierten Subgraph $G[U]$.

Musterlösung

a) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}\}$

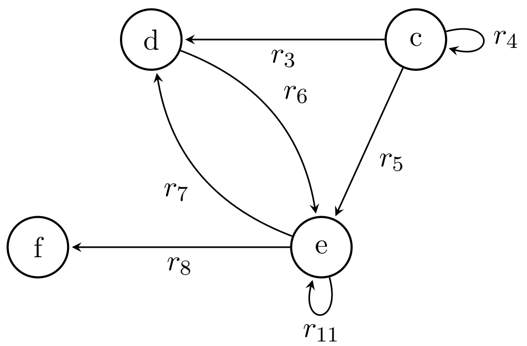
	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1	a	b
r_2	b	c
r_3	c	d
r_4	c	c
r_5	c	e
r_6	d	e
r_7	e	d
r_8	e	f
r_9	f	a
r_{10}	a	d
r_{11}	e	e
r_{12}	b	d

b) r_4 und r_{11} sind Schlingen, r_6 und r_7 sind anti-parallel. Es gibt keine Parallelen. G ist nicht einfach, da G Schlingen enthält.

c) $\delta^+(c) = \{r_3, r_4, r_5\}$, $\delta^-(c) = \{r_2, r_4\}$, $N^+(c) = \{c, d, e\}$, $N^-(c) = \{b, c\}$, $N(c) = \{b, c, d, e\}$
$\delta^+(d) = \{r_6\}$, $\delta^-(d) = \{r_3, r_7, r_{10}, r_{12}\}$, $N^+(d) = \{e\}$, $N^-(d) = \{a, b, c, e\}$, $N(d) = \{a, b, c, e\}$

d) $g^+(e) = 3$, $g^-(e) = 3$

e) :



Aufgabe 2: Ungerichtete Graphen *(5 Punkte)*

Gegeben sei der (ungerichtete) Graph $G = (V, E, \gamma)$ mit

$$V = \{v_1, \ldots, v_8\}$$
$$E = \{r_1, \ldots, r_{13}\}$$
$$\gamma(r_i) = \begin{cases} \{v_i, v_{i+1}\} & i \in \{1, \ldots, 7\} \\ \{v_i, v_{i/2}\} & i = 8 \\ \{v_{i-5}, v_{i-3}\} & i \in \{9, 10\} \\ \{v_{i-7}, v_{i-4}\} & i \in \{11, 12\} \\ \{v_6, v_8\} & i = 13 \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie G.

b) Bestimmen Sie den Maximal- und den Minimalgrad von G.

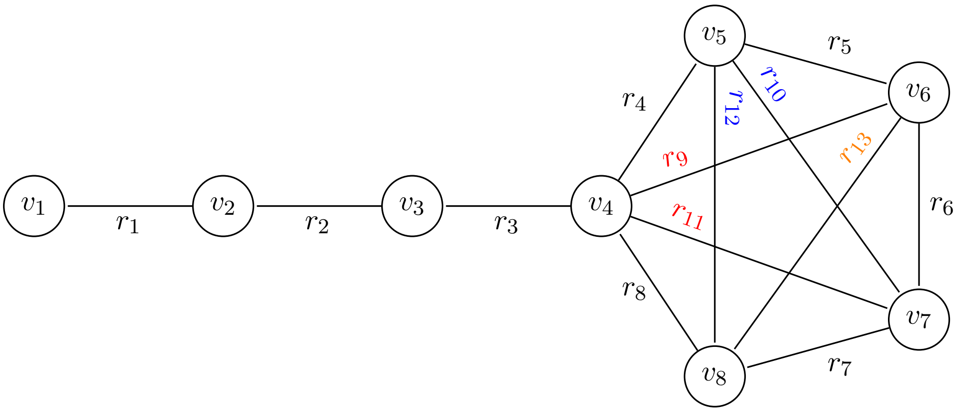
c) Bestimmen Sie alle zu r_4 inzidenten Kanten und die Menge $N(v_4)$. Ist G einfach?

d) Ist der induzierte Subgraph $G[V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}]$ Δ-regulär? Wenn ja, bestimmen sie Δ.

e) Finden Sie eine (größtmögliche) Knotenmenge $U' \subseteq V$, so dass $G[U']$ ein vollständiger Graph ist.

Musterlösung

a) G:



b) $S(G) = 1$ und $\Delta(G) = 5$.

c) Inzident zu r_4 sind: $r_3, r_9, r_{11}, r_8, r_{10}, r_{12}, r_5$ und r_4 selbst!
$N(v_4) = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.
G ist einfach, da er keine Schlingen oder Parallelen enthält.

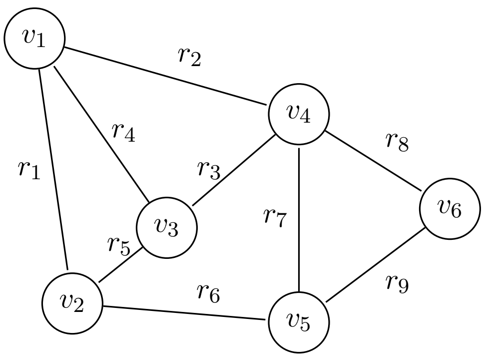
d) Der induzierte Subgraph ist 4-regulär.

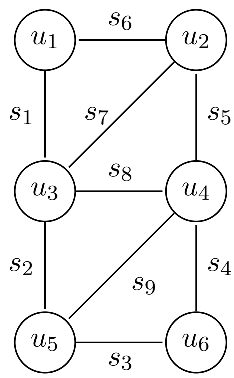
e) $U' = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

Aufgabe 3: Isomorphismus *(6 Punkte)*

Geben Sie zu den jeweiligen Graphenpaaren jeweils an ob diese **isomorph** zueinander sind oder nicht. Falls ja, geben Sie die zugehörigen (bijektiven) Abbildungen σ und τ an. Falls nicht, begründen Sie warum es keine solchen Abbildungen geben kann.

a)

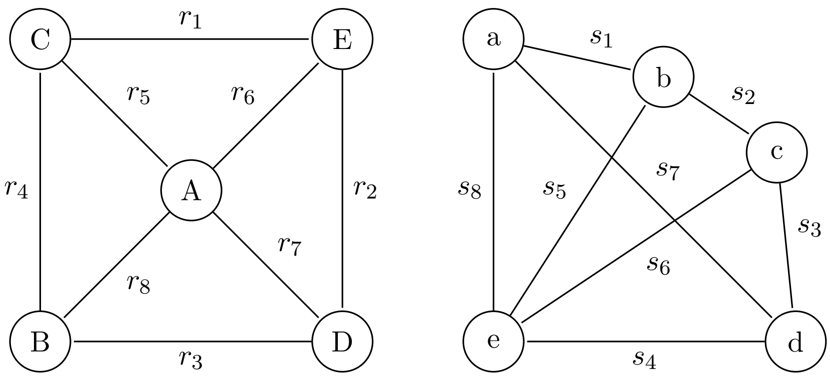




Musterlösung

Diese beiden Graphen sind nicht isomorph. Das erkennt man daran dass es im linken Graphen nur einen Knoten mit Grad 4 gibt (v_4), während im rechten Graph sowohl u_3 wie auch u_4 4 inzidente Kanten besitzen. Da die Funktion σ nur Knoten mit gleichem Grad aufeinander abbildet, kann diese hier nicht existieren.

b)



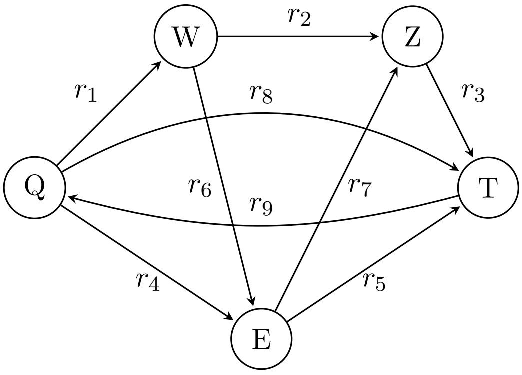
Musterlösung

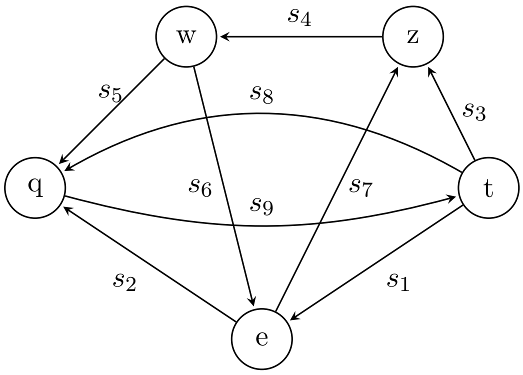
Hier existiert ein Isomorphismus. In beiden Graphen gibt es genau einen Knoten mit Grad 4, daraus folgt sofort dass $\sigma(A) = e$. Für die Abbildung der anderen Knoten gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist in folgender Tabelle aufgeführt. Die Abbildung τ ergibt sich direkt aus σ, da wenn $\{u, v\}$ eine Kante im linken Graph ist, muss $\tau(\{u, v\}) = \{\sigma(u), \sigma(v)\}$ als Kante im rechten Graph existieren.

	σ
A	e
B	b
C	c
D	a
E	d

	τ
r_1	s_3
r_2	s_7
r_3	s_1
r_4	s_2
r_5	s_6
r_6	v_4
r_7	s_8
r_8	s_5

c)





Musterlösung

Die gerichteten Graphen sind nicht isomorph zueinander. In beiden Graphen gibt es nur einen Knoten der 3 ausgehende und eine eingehender Kante hat. Somit muss $\sigma(Q) = t$ gelten falls σ existieren sollte. Ebenso muss aufgrund der ein- und ausgehenden Kanten gelten, dass $\sigma(T) = q$ und $\sigma(W) = w$. Nun können wir zeigen, dass es keine Möglichkeit gibt r_1 mittels τ abzubilden. Nach Definition 2.4 müsste folgende Aussage für alle Kanten, somit auch für r_1, gelten (wir nennen den linken Graph G_1 und den rechten G_2 getreu Definition 2.4):

$$\alpha_2(\tau(r_1)) = \sigma(\alpha_1(r_1)) = \sigma(Q) = t$$
$$\omega_2(\tau(r_1)) = \sigma(\omega_1(r_1)) = \sigma(W) = w$$

Da es in G_2 jedoch keine Kante von t nach w gibt, kann r_1 nicht auf eine Kante in G_2 abgebildet werden und somit sind die beiden Graphen nicht isomorph zueinander.

Aufgabe 4: Teilgraphen *(4 Punkte)*

Geben Sie einen gerichteten Graphen G mit (genau) 5 Knoten und mindestens 5 Kanten an. Finden Sie nun zusätzlich folgende Graphen:

a) $G_1 \sqsubseteq G$, der sowohl Subgraph als auch Partialgraph von G ist.

b) $G_2 \sqsubseteq G$, der weder Subgraph noch Partialgraph von G ist.

c) $G_3 \sqsubseteq G$, der Subgraph aber kein Partialgraph von G ist.

d) $G_4 \sqsubseteq G$, der Partialgraph aber kein Subgraph von G ist.

Hinweis: Es genügt hier G und seine Teilgraphen zu zeichnen.

Musterlösung

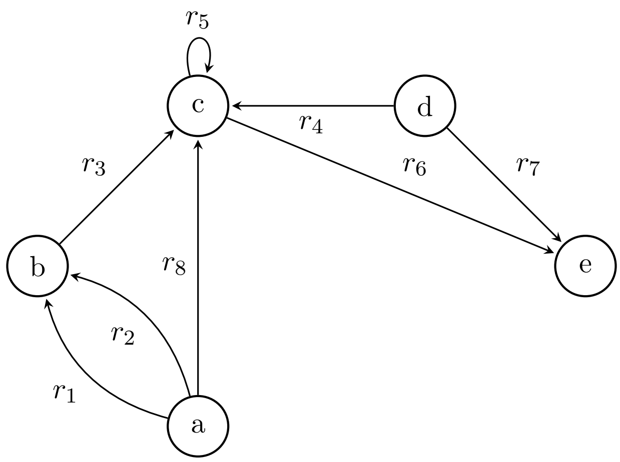


Abbildung 2: G

a) Der einzige Teilgraph von G, der sowohl Sub- als auch Partialgraph ist, ist G selbst.

b)

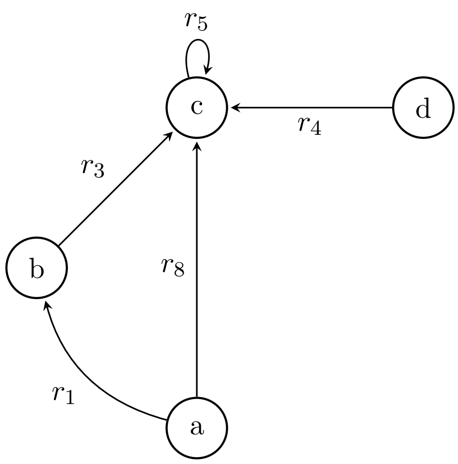


Abbildung 3: G_2

c)

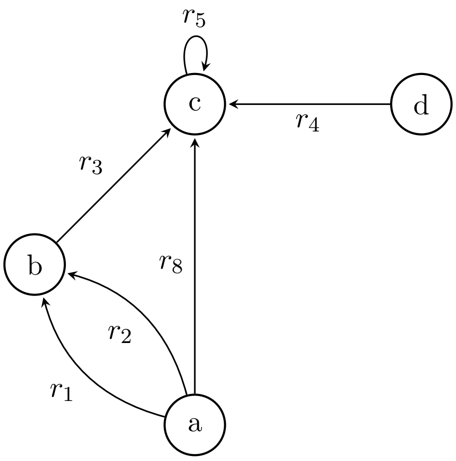


Abbildung 4: G_3

d)

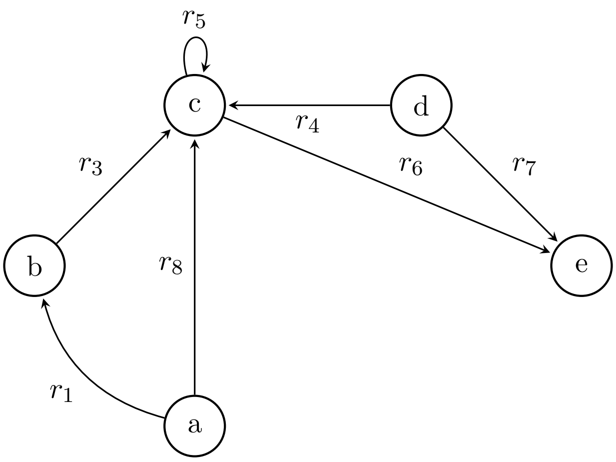


Abbildung 5: G_4