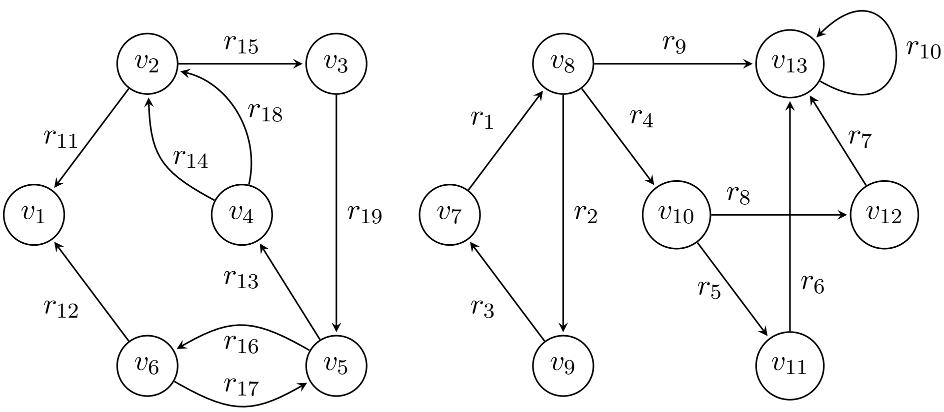
Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Musterlösung Übungsblatt 2

Abgabe: 18.05, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1: Speicherung, Zusammenhang *(5 Punkte)*

G :



a) Geben Sie die Adjazenzmatrix für G an. *(1 Punkt)*

b) Zeichnen Sie den zu G zugeordneten Graphen H. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie die Inzidenzmatrix von H an. *(1 Punkt)*

d) Berechnen Sie die Zusammenhangskomponente $ZK_G(v_8)$ und geben Sie alle starken und schwachen Zusammenhangskomponenten an. *(1 Punkt)*

e) Finden Sie eine minimale Anzahl von *neuen* Kanten, so dass, wenn man diese G hinzufügt, ein (gerichteter) Graph G' entsteht, der stark zusammenhängend ist. *(1 Punkt)*

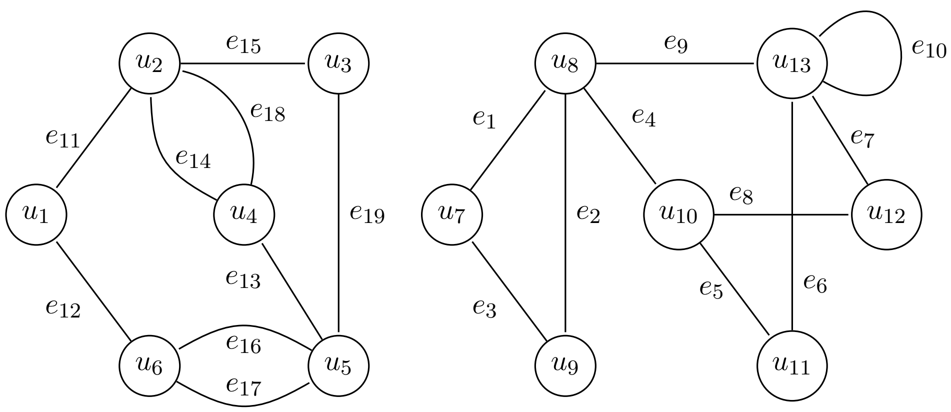
Musterlösung

a) Im folgenden die Adjazenzmatrix $A(G)$, wobei der Eintrag a_{ij} angibt wie viele Kanten in G von v_i nach v_j existieren.

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

b) Der zu G zugeordnete Graph H:

$G:$



c) Inzidenzmatrix $I(H)$

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

d) **starke Zusammenhangskomponenten:**

- $ZK_G(v_1) = \{v_1\}$
- $ZK_G(v_2) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $ZK_G(v_8) = \{v_7, v_8, v_9\}$
- $ZK_G(v_{10}) = \{v_{10}\}$
- $ZK_G(v_{11}) = \{v_{11}\}$
- $ZK_G(v_{12}) = \{v_{12}\}$
- $ZK_G(v_{13}) = \{v_{13}\}$

schwache Zusammenhangskomponenten:

- $\{v_1, \dots, v_6\}$
- $\{v_7, \dots, v_{13}\}$

e) Die gewünschten Kanten sind z.B. (v_1, v_7) und (v_{13}, v_3).

Aufgabe 2: Komplement- und Line-Graphen *(7 Punkte)*

Sei im folgenden der ungerichtete Graph G gegeben.

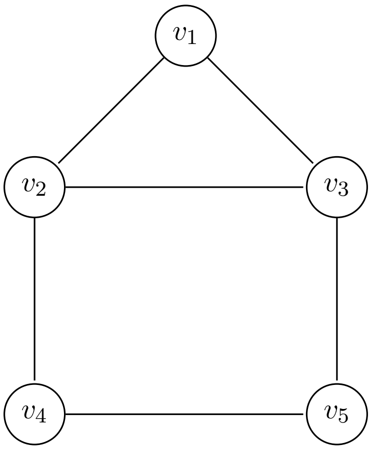


Abbildung 1: Graph G

a) Geben sie einen Graphen G' an, so dass der Line-Graph von G' gerade G entspricht ($L(G') = G$). *(2 Punkte)*

b) Gibt es zu jedem ungerichteten einfachen Graphen G_L einen Graphen G, so dass $L(G) = G_L$ ist? Begründen Sie! *(2 Punkte)*

c) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher Graph. Der Graph $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$ heißt Komplementgraph von G. *(3 Punkte)*

Geben Sie einen ungerichteten, einfachen Graphen an, welcher Isomorph zu seinem eigenen Komplementgraph ist.

Musterlösung

a) siehe folgende Abbildung:

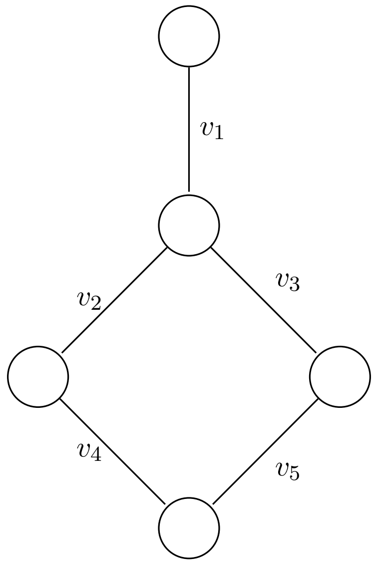


Abbildung 2: Graph G'

b) Nein! Im folgenden ein Gegenbeispiel (noch mehr Gegenbeispiele gibt es hier)

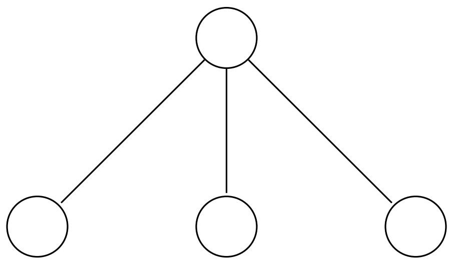


Abbildung 3: Graph G_L (es gibt kein G mit $L(G) = G_L$)

c) Ja, gibt es:

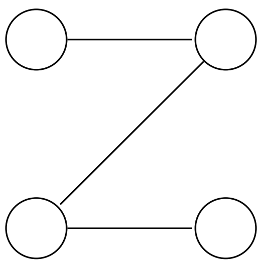


Abbildung 4: Graph der Isomorph zu seinem Komplementgraphen ist.

Aufgabe 3: Topologische Sortierung *(8 Punkte)*

Gegeben sei eine Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

a) Beschreiben Sie einen Graphen G mit Knotenmenge V und maximaler Anzahl an verschiedenen topologischen Sortierungen. Wie hoch ist die Anzahl toplogischer Sortierungen von G?

   Hinweis: Wie wirkt sich das Hinzufügen/Löschen von Kanten auf die Anzahl topologischer Sortierungen aus? *(3 Punkte)*

b) Sei G ein Graph mit Knotenmenge V. Zeigen Sie:

$$G \text{ hat genau eine topologische Sortierung} \quad \Rightarrow \quad G \text{ hat einen elementaren Weg der Länge } n-1.$$

Hinweis: Denken Sie an den Algorithmus für topologische Sortierung aus der Vorlesung.

(4 Punkte)

c) Gilt auch die umgekehrte Richtung der Implikation in Teil (b)? Begründen Sie ihre Antwort.

(1 Punkt)

Musterlösung

a) Sei $G = (V, \emptyset)$. Jede Permutation von V entspricht einer topologischen Sortierung von G. Es gibt $n!$ Permutationen von V.

b) G muss genau einen Knoten u_0 mit Eingangsgrad 0 haben: Hätte kein Knoten Eingangsgrad 0, so würde es keine topologische Sortierung geben und würde es mehrere mit Eingangsgrad 0 geben, so könnten wir jeden dieser Knoten als erstes Element der topologischen Sortierung wählen. Nun entfernen wir u_0 und alle seine inzidenten Kanten aus G. Aus dem gleichen Grund wie zuvor folgt nun, dass es genau einen Knoten u_1 mit Eingangsgrad 0 gibt. Es folgt außerdem, dass es eine Kante von u_0 nach u_1 gibt, da ansonsten u_1 bereits im ersten Schritt Eingangsgrad 0 gehabt hätte. Nun entfernen wir u_1 aus G und fahren fort wie zuvor. So können wir induktiv einen elementaren Weg $u_0, u_1, \dots$ konstruieren, der alle Knoten umfasst.

c) Besteht G aus einem gerichteten Kreis, so hat G einen elementaren Weg der Länge $n-1$, aber keine topologische Sortierung. Es gilt allerdings

$$G \text{ hat einen elementaren Weg der Länge } n-1 \Rightarrow G \text{ hat höchstens eine topologische Sortierung}$$