Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Musterlösung Übungsblatt 3

Abgabe: 01.06, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1: Eulersche und Hamiltonsche Kreise *(10 Punkte)*

Betrachten Sie im Folgenden einfache, ungerichtete, zusammenhängende Graphen. Beweisen oder widerlegen Sie.

a) Nach dem **Satz von Euler** kann ein 3-regulärer Graph niemals Eulersch sein. Kann ein solcher Graph dennoch Hamiltonsch sein? *(1 Punkt)*

b) Der Komplementgraph (siehe Übungsblatt 2) eines Eulerschen Graphen ist ebenso Eulersch. *(1 Punkt)*

c) Ein Graph ist Eulersch genau dann, wenn man seine Kantenmenge als disjunkte Vereinigung von Kreisen schreiben kann (Sprich, $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \dots$ wobei jedes C_i die Kanten eines (einfachen) Kreises enthält). *(3 Punkte)*

d) Sei v_0 der Start/Endknoten eines Hamiltonschen Kreises C. Wenn es eine Kante e gibt die nicht in C vorkommt, kann es keinen Eulerschen Kreis geben der bei v_0 beginnt. *(1 Punkt)*

e) Wenn G Eulersch ist, dann ist der Line-Graph $L(G)$ Hamiltonsch. *(2 Punkte)*

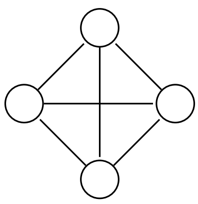
f) Wir definieren den Abstand $\text{dist}(u, v)$ zwischen zwei Knoten u und v als die Länge eines kürzesten Pfades zwischen u und v. Der Durchmesser eines Graphen G ist definiert als

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} \text{dist}(u, v) \ .$$

Ist G Eulersch, so gilt $\text{diam}(G) \leq n/2$. *(2 Punkte)*

Musterlösung

a) Ja, ein 3-regulärer Graph kann Hamiltonsch sein:



b) Diese Aussage kann schon alleine deswegen nicht stimmen, weil der Komplementgraph eines zusammenhängenden Graphen selbst nicht mehr zusammenhängend sein muss. Beispielweise gilt für $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$, dass $\overline{G} = (\{u, v\}, \emptyset)$.

c) Die Aussage ist richtig. Wir zeigen zuerst "$\Rightarrow$". Wenn G Eulersch ist, bedeutet dies dass es einen Kreis C gibt, der jede Kante genau einmal durchläuft. Dementsprechend gilt $E = C$. Nun zu $\Leftarrow$: Geben ist nun $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \cdots \dot\cup C_k$ für irgendein ganzzahliges $k \geq 1$, wobei jedes C_i für einen einfachen Kreis steht. Klar ist dass jeder Knoten im Graph $G_k = (V, C_k)$ entweder Grad 0 hat (wenn die Kanten aus C_k diesen Knoten nicht berühren) oder der Grad positiv und gerade ist (da C_k ein einfacher Kreis ist). Wenn man nun die Kanten eines weiteren Kreises zu G_k hinzufügt, bleibt diese Eigenschaft erhalten (da die Addition von geraden Zahlen wieder eine gerade Zahl ergibt). Somit hat auch nach hinzufügen der Kanten aller k Kreise jeder Knoten einen geraden Grad. Da nach Voraussetzung $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \cdots \dot\cup C_k$, hat jeder Knoten in G geraden Grad und da wir annehmen dass G zusammenhängend ist, existiert nach dem Satz von Euler ein Eulerscher Kreis.

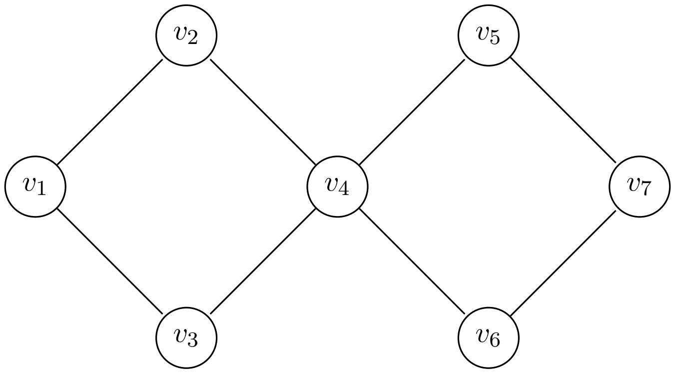
d) Diese Aussage ist falsch: Als Gegenbeispiel dient der vollständige Graph K_5. Nehmen wir uns einen beliebigen Knoten als Startknoten v_0 her. Geht man von v_0 ausgehend alle Knoten im Uhrzeigersinn durch, findet man einen Hamiltonschen Kreis der Länge 5, wobei nicht jede Kante des Graphen darin vorkommt. Da jeder Knoten Grad 4 hat muss es aber einen Eulerkreis geben und somit auch einen der bei v_0 beginnt.

e) Die Aussage stimmt. Wenn G Eulersch ist, existiert ein Kreis $(v_0, e_1, v_1, e_2 ..., e_m, v_0)$ wobei $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$. Für $L(G) = (V_L, E_L)$ gilt dass $V_L = E$ und eine Kante $\{e, e'\} \in E_L$ genau dann wenn $e \neq e'$ und $e \cap e' \neq \emptyset$. Somit existiert in $L(G)$ ein Pfad folgender Form, in welchem jeder Knoten nur ein einziges mal vorkommt:

$$(e_1, \{e_1, e_2\}, e_2, \{e_2, e_3\}, e_3, ..., e_{m-1}, \{e_{m-1}, e_m\}, e_m)$$

Außerdem wissen wir dass in G e_m, genauso wie e_1, inzident zu v_0 sind, was bedeutet $\{e_m, e_1\} \in E_L$ liegt. Dementsprechend können wir obigen Pfad zu einem Kreis ergänzen. Da die Anzahl der Knoten $|V_L|$ gerade m entspricht, besucht der Kreis jeden Knoten genau einmal (Ausnahme ist natürlich der Start/Endkoten der 2 mal vorkommt). (V_L, E_L) ist somit Hamiltonsch.

f) Die Aussage ist falsch, betrachte dafür folgenden Graph mit $diam(G) = 4$ und $n = 7$ Knoten. Es gilt $n/2 = 3.5 < 4 = diam(G)$.



Anmerkung 1: Wenn man diese Konstruktion fortführt, d.h. immer drei Knoten hinzufügt, sodass sich der Durchmesser um 2 erhöht, so konvergiert der Durchmesser gegen $\frac{2}{3}n$.

Anmerkung 2: Wäre ein Hamiltonscher Graph anstatt eines Eulerschen Graphen gegeben, würde die Aussage stimmen. Die Beweisidee hierfür ist folgende: Seinen u und v die beiden Knoten die am weitesten im Graph voneinander entfernt liegen. Man kann u von v erreichen in dem man den Hamiltonkreis *"abläuft"*. In ungerichteten Graphen kann man diesen Kreis sowohl *im Uhrzeigersinn* wie auch *im Gegenuhrzeigersinn* ablaufen. Da der gesamte Kreis die Länge n hat, muss der kürzere dieser beiden möglichen Pfade eine Länge von maximal $n/2$ haben. Da nach Definition u und v den maximalen Abstand alle Knoten im Graphen haben ist deren Abstand gleich dem Durchmesser.

Aufgabe 2: Gerichtete Hamiltonkreise *(2.5 Punkte)*

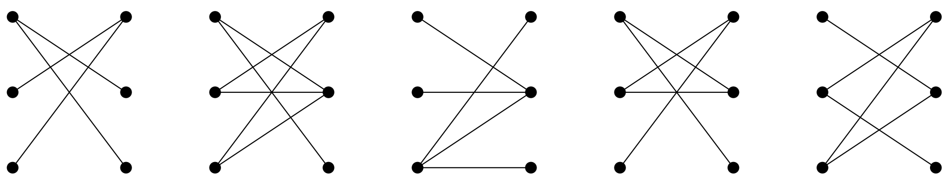
Wir definieren Hamiltonkreise in gerichteten Graphen analog zum ungerichteten Fall: Sei G ein gerichteter Graph. Ein (gerichteter) Kreis K in G heißt Hamiltonsch, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.
Sei HAMILTONKREIS das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener *ungerichteter* Graph einen Hamiltonkreis hat und GERICHTETER HAMILTONKREIS das Problem zu entscheiden, ob ein gegebener *gerichteter* Graph einen Hamiltonkreis hat. Zeigen Sie, dass das Problem HAMILTONKREIS NP-schwer ist. Sie dürfen nutzen, dass das Problem GERICHTETER HAMILTONKREIS NP-schwer ist.

Musterlösung

Wir zeigen GERICHTETER HAMILTONKREIS $\leq_P$ HAMILTONKREIS, d.h. man kann GERICHTETER HAMILTONKREIS polynomiell auf HAMILTONKREIS reduzieren. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein polynomieller Algorithmus für HAMILTONKREIS. Ein polynomieller Algorithmus für GERICHTETER HAMILTONKREIS sieht dann so aus: Gegeben ein gerichteter Graph G, definieren wir den Graphen G' wie folgt. Für jeden Knoten v fügen wir zwei Knoten v_{in} und v_{out} sowie die Kanten $\{v_{in}, v\}$ und $\{v, v_{out}\}$ hinzu. Jede gerichtete Kante (u, v) in G ersetzen wir durch $\{u_{out}, v_{in}\}$. Dann lassen wir $\mathcal{A}$ auf G' laufen.
Der Algorithmus hat Polynomialzeit, falls $\mathcal{A}$ Polynomialzeit hat und ist korrekt, da G einen gerichteten Hamiltonkreis hat genau dann, wenn G' einen ungerichteten Hamiltonkreis hat: Aus einem gerichteten Hamiltonkreis in G ergibt sich ein ungerichteter Hamiltonkreis in G', wenn man jeden Knoten v in G durch die Knotenfolge v_{in}, v, v_{out} ersetzt. Andersherum enthält ein Hamiltonkreis in G' alle "Mittelknoten" v und damit auch die Kanten $\{v_{in}, v\}$ und $\{v, v_{out}\}$, und zwar unmittelbar hintereinander (anders ist v nicht zu erreichen). Der Hamiltonkreis ist also eine Aneinanderreihung von Knotentripeln v_{in}, v, v_{out} oder v_{out}, v, v_{in}. Aus der Konstruktion von G' folgt, dass diese Tripel alle in einheitlicher Reihenfolge durchlaufen werden müssen, d.h. auf einen out-Knoten folgt immer ein in-Knoten oder umgekehrt. Ein solcher Hamiltonkreis entspricht aber einem gerichteten Hamiltonkreis in G, wenn man ihn in der Reihenfolge v_{in}, v, v_{out} durchläuft.

Aufgabe 3: Bäume und Wälder *(2.5 Punkte)*

Geben Sie zu jedem der folgenden Graphen an ob es sich um einen Wald bzw. einen Baum oder nichts von beidem handelt.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4 (e) G_5

Musterlösung

a) Wald

b) Hier existiert ein Kreis

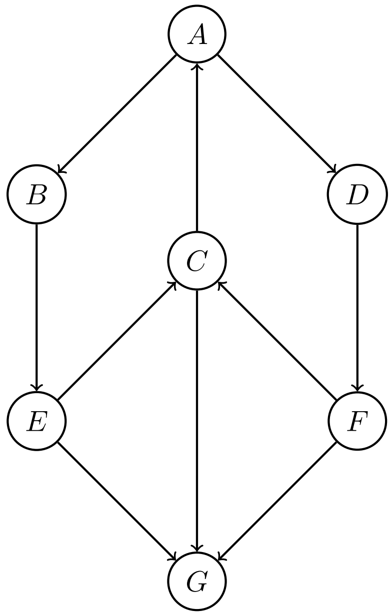
c) Baum (und somit auch ein Wald)

d) Baum

e) Baum

Aufgabe 4: Tiefensuche *(5 Punkte)*

Gegeben sei folgender Graph



a) Führen Sie eine Tiefensuche auf dem Graphen mit Startknoten A aus. Falls Sie die Wahl zwischen mehreren Knoten haben, wählen Sie als Nachfolgeknoten jeweils den alphabetisch kleinsten. Geben Sie $d[v]$ und $f[v]$ für jeden Knoten v an. *(2 Punkte)*

b) Geben Sie alle Baumkanten (tree edges), Rückwärtskanten (backward edges), Vorwärtskanten (forward edges) und Kreuzkanten (cross edges) an. *(1 Punkt)*

c) Kann man im Allgemeinen aus der Discovery Time bzw. der Finishing Time eine topologische Sortierung des Graphen berechnen? Wenn ja, wie würden Sie vorgehen? *(2 Punkte)*

Musterlösung

a)

	$d[v]$	$f[v]$
A	0	13
B	1	8
C	3	6
D	9	12
E	2	7
F	10	11
G	4	5

b) Baumkanten (tree edges): (A, B), (B, E), (E, C), (C, G), (A, D), (D, F)

Rückwärtskanten (back edges): (C, A)

Vorwärtskanten (forward edges): (E, G)

Kreuzkanten (cross edges): (F, C), (F, G)

c) Wir sortieren die Knoten absteigend nach der finishing time, d.h. $\sigma(u) < \sigma(v)$ falls $f[v] < f[u]$. Wir zeigen: Ist der Graph kreisfrei, so ist σ eine topologische Sortierung. Sei (u, v) eine Kante im Graph. Falls $d[u] < d[v]$, so gilt $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$. Falls $d[v] < d[u]$, so gilt $d[v] < f[v] < d[u] < f[u]$, da u nicht von v aus zu erreichen ist (Kreisfreiheit). In jedem Fall gilt $f[v] < f[u]$ und daher $\sigma(u) < \sigma(v)$.