Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Musterlösung Übungsblatt 5

Abgabe: 29.06, 16:00 Uhr.

Aufgabe 1: Matchings und Knotenüberdeckungen *(5 Punkte)*

a) Aus der Vorlesung ist bekannt dass $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2 \cdot \nu(G)$ für einfache, zusammenhängende (ungerichtete) Graphen G gilt. Zeigen Sie dass tatsächlich ein Graph H existiert, für welchen $\tau(H) = 2 \cdot \nu(H)$ gilt.

b) Sei im folgenden die Familie der Kreisgraphen C_n gegeben, welche aus $n > 2$ Knoten bestehen die genau einen Kreis bilden (sprich jeder Koten hat Grad genau 2).

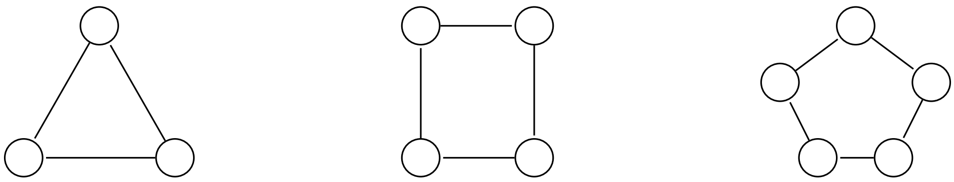

Abbildung 1: Die Graphen C_3, C_4 und C_5

Geben Sie $\nu(C_n)$ an. Zeigen Sie außerdem dass $\frac{\tau(C_n)}{\nu(C_n)} \leq \frac{2}{n-1} + 1$.

Musterlösung

a) In folgendem Graph H besteht das größtmögliche Matching aus genau einer Kante (egal welche), eine Knotenünerdeckung die aus nur einem Koten besteht kann es hier aber nicht geben, da die Kante gegenüber dieses Knotens nicht abgedeckt wäre. Dementsprechend bestehe die kleinste Knotenüberdeckung aus zwei Knoten.

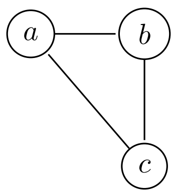

Abbildung 2: Graph H

b)

$$\nu(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zur Berechnung des Bruches schauen wir uns erst τ an.

$$\tau(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\frac{\tau(C_n)}{\nu(C_n)} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ \frac{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}} & n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{n-1} & n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n-1} + 1 & n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{2}{n-1} + 1$$

Aufgabe 2: Grapheigenschaften *(8 Punkte)*

Betrachten Sie im folgenden die 3-reguläre Graphenfamilie K_l mit $n = 4 \cdot l$ Knoten, wobei $l = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, die folgendermaßen aufgebaut ist:

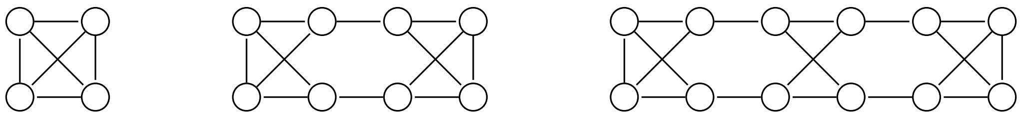

Abbildung 3: Die Graphen K_1, K_2 und K_3

Bestimmen sie für K_l (in Abhängigkeit von l) folgende Werte:

a) Die **Chromatische** Zahl

b) Die **Cliquenzahl**

c) Die **Cliquenzerlegungszahl**

d) Die **Unabhängigkeitszahl**

Hinweis: Sie müssen ihre Aussagen nicht Begründen/Beweisen.

Musterlösung

a)

$$\chi(K_l) = \begin{cases} 4 & l = 1 \\ 3 & l > 1 \end{cases}$$

b)

$$\omega(K_l) = \begin{cases} 4 & l = 1 \\ 3 & l > 1 \end{cases}$$

c)

$$\overline{\chi}(K_l) = 2l - 1$$

d)

$$\alpha(K_l) = 2l - 1$$

Aufgabe 3: Unabhängige Menge *(3 Punkte)*

Beweisen oder Widerlegen Sie: In jedem einfachen (ungerichteten) Graphen G mit n Knoten und maximalem Grad Δ gibt es eine unabhängige Menge U mit

$$|U| \geq \frac{n}{\Delta + 1}.$$

Musterlösung

Die Aussage ist wahr und funktioniert zum Beispiel wenn man U als die größtmögliche unabhängige Menge wählt. Für diese Aufgabe reicht es sogar aus eine maximale unabhängige Menge (auch nicht erweiterbare unabhängige Menge genannt) herzunehmen.
Wir nennen eine unabhängige Menge U eine maximale unabhängige Menge wenn für alle $v \in V \setminus U$ gilt dass $U \cup \{v\}$ keine zulässige unabhängige Menge mehr ist. Anders ausgedrückt gibt es keinen Knoten v mit dem man die Menge U vergrößern könnte.
Anmerkung 1: Eine maximale unabhängige Menge muss nicht größtmöglich sein (ein Beispiel dafür findet man leicht in einem Sterngraph). Auf der anderen Seite ist eine größtmögliche unabhängige Menge immer maximal. In jedem einfachen ungerichteten Graphen gibt es mindestens eine maximale unabhängige Menge.
Anmerkung 2: Eine maximale unabhängige Menge lässt sich in Polynomialzeit finden, während es ein NP-vollständiges Problem ist eine größtmögliche unabhängige Menge zu berechnen.

Zum Beweis: Sei im folgenden U eine maximale unabhängige Menge. Eine Eigenschaft der Maximalität ist dass jeder Knoten $v \in V$ entweder selbst ein Element von U ist oder einen Nachbarn $u \in U$ besitzt. Dementsprechend kann man die Gesamtanzahl der Knoten nach oben hin abschätzen wenn man jeden Knoten $u \in U$ mit der Anzahl aller seiner Nachbarn ($N_G(u)$) addiert:

$$n \leq \sum_{u \in U} |\{u\} \cup N_G(u)| = \sum_{u \in U} 1 + g_G(u) \leq \sum_{u \in U} 1 + \Delta = |U| \cdot (1 + \Delta)$$

Aufgabe 4: Chordale Graphen *(4 Punkte)*

Seien $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$ Intervalle mit $a_j \leq b_j$. Der *Intervallgraph* G_Γ zu $\Gamma = \{I_1, ..., I_n\}$ ist der einfache, ungerichtete Graph $G_\Gamma = (\Gamma, E_\Gamma)$ mit

$$E_\Gamma := \{\{I_j, I_k\} \mid I_j \neq I_k,\ I_j \cap I_k \neq \emptyset\}.$$

Zeigen Sie dass jeder Intervallgraph **chordal** ist.

Musterlösung

Beweis durch Widerspruch. Angenommen es gibt einen Intervallgraphen G_Γ der nicht chordal ist. Es muss also mindestens einen elementaren Kreis der Länge $k \geq 4$ geben, welcher keine Sehne besitzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seinen die Knoten (bzw. Intervalle) $I_1, I_2, ..., I_k$ die Knoten dieses Kreises und sei außerdem $a_1 \leq a_j$ für alle $1 < j \leq k$. Aufgrund der Definition der Kantenmenge muss also gelten dass für alle $1 \leq i \leq k-1$ gilt $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$, sowie $I_k \cap I_1 \neq \emptyset$. Der Schnitt aller nicht angegeben Kombinationen von Intervallen ist leer, da sonst eine Sehne existieren würde. Daraus folgt folgende Ordnung:

$$a_1 \leq a_2 \leq b_1 < a_3 \leq b_2 < a_4 \leq ... < a_k \leq b_{k-1} \leq b_k$$

Dies würde aber bedeuten dass $I_1 \cap I_k = [a_1, b_1] \cap [a_k, b_k] = \emptyset$. Widerspruch.