Albert-Ludwigs-Universität
Institut für Informatik
Prof. Dr. F. Kuhn
P. Bamberger
M. Fuchs

Graphentheorie
Sommersemester 2021
Musterlösung Übungsblatt 6

Abgabe: 13.07., 16:00 Uhr

Aufgabe 1: Färbung und Taillenweite *(5 Punkte)*

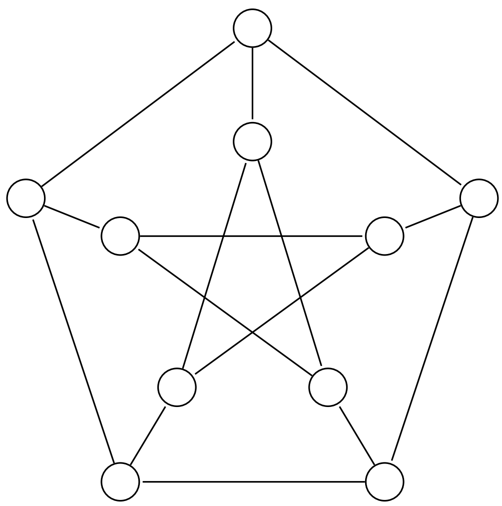

Abbildung 1: Der Petersen-Graph

a) Zeigen Sie dass im Petersen-Graph $\chi(G) = 3$ gilt. Gehen Sie wie folgt vor:

- Geben Sie eine 3-Färbung für G an. *(1 Punkt)*
- Zeigen Sie warum es keine gültige 2-Färbung geben kann. *(1 Punkt)*

b) Welche Taillenweite hat der Petersen-Graph? *(1 Punkt)*

c) Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem einfachen zusammenhängenden Graphen G, welcher (mindestens) einen elementaren Kreis besitzt gilt: $g(G) \leq 2 \cdot \text{diam}(G) + 1$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Die Taillenweite $g(G)$ von G ist die Länge des kürzesten elementaren Kreises in G. Der Abstand zweier Knoten ist die Länge des kürzesten Weges zwischen diesen Knoten. Der Durchmesser $\text{diam}(G)$ ist der größte Abstand zweier Knoten in G.

Musterlösung

a) Eine gültige 3-Färbung ist in folgender Abbildung zu sehen. Eine 2-Färbung kann es nicht geben, da im Petersen-Graph Kreise ungerade Länge vorkommen z.B. $(u_1, u_2, v_2, v_3, u_3, u_1)$.

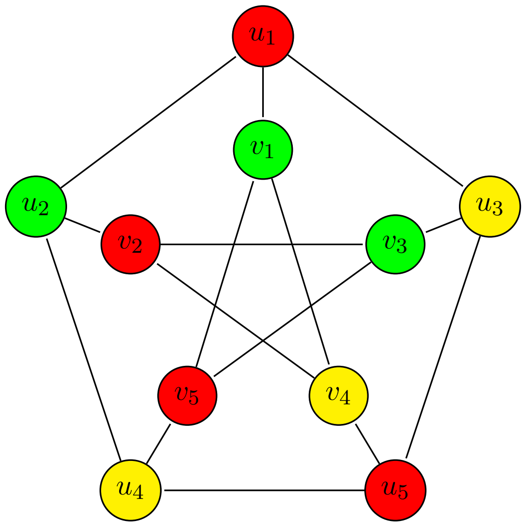

Abbildung 2: Petersen-Graph mit 3-Färbung

b) $g(G) = 5$

c) Sei $C = (v = v_0, v_1, ..., u = v_i, ..., v_{g-1}, v_g = v)$ der kürzeste elementare Kreis in G mit $|C| = g$ (nach Aufgabenstellung existiert solch ein Kreis). Seinen $u, v \in V$ die Knoten in C welche den größten Abstand (aller Knoten in C) voneinander haben und $dist(u, v)$ der Abstand von u nach v. Der Weg von v nach u entlang des Kreises C und der Weg von u nach v entlang C sind entweder gleich lang (wenn $|C|$ gerade) oder unterscheiden sich in der Länge um genau eine Kante (wenn $|C|$ ungerade). Da $dist(v, u)$ gerade der Länge des kürzeren dieser beiden Wege entspricht, gilt folgende Aussage:

$$g = |C| \leq 2 \cdot dist(v, u) + 1 \leq 2 \cdot \mathrm{diam}(G) + 1$$

Aufgabe 2: Zufallsgraph *(6 Punkte)*

Betrachten Sie den Erdős-Rényi-Graphen $G(n, p)$ mit $n \geq 5$ und $0 < p < 1$. Sei außerdem (S, T) ein Schnitt von G ($S \dot\cup T = V(G)$) und $c(S) := \sum_{v \in S} |\{\{v, u\} \mid u \in T\}|$ der Wert des Schnittes wenn man die Kapazität jeder Kante auf 1 setzt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Schnittes $\mathbb{E}[c(S)]$ in Abhängigkeit von $|S|$, n und p. *(1 Punkt)*

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst wie groß dieser Erwartungswert bei einem vollständigen Graphen wäre.

b) Zeigen Sie dass für alle möglichen $S \subseteq V(G)$ gilt dass $\mathbb{E}[c(S)] \leq \frac{n^2}{4} \cdot p$. *(2 Punkte)*

c) Schätzen Sie $\mathbb{P}[c(S) \geq 3]$ mithilfe der Markov-Ungleichung ab. Nutzen Sie dafür die Obergrenze des Erwartungswerts aus Aufgabenteil b). *(1 Punkt)*

d) Sei $V' \subseteq V(G)$ eine Knotenmenge mit genau 5 Elementen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist V' eine unabhängige Menge in G? *(1 Punkt)*

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich $G[V']$ mit 4 (oder weniger) Farben färben? *(1 Punkt)*

Musterlösung

a) In einem vollständigen Graphen ist jeder Koten aus S mit allen Knoten aus T verbunden somit gilt hier dass der Schnitt eine Kapazität von $|S| \cdot |T|$ hat. Da nun jede dieser Kanten mit Wahrscheinlichkeit p existiert gilt:

$$\mathbb{E}[c(S)] = |S| \cdot |T| \cdot p = |S| \cdot (n - |S|) \cdot p = pn|S| - p|S|^2$$

b) Sei $x := |S|$. Wir wissen dass der Erwartungswert bei $-px^2 + pnx$ liegt. Bei fixem n und p ergibt diese Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Diese hat ein eindeutiges Maximum. Dieses finden wir indem wir die Ableitung null setzten und nach x auflösen: $-2px + pn = 0 \Rightarrow x = n/2$. Wir wissen also dass der Erwartungswert maximal wird wenn $|S| = |T| = n/2$. Wir bekommen also:

$$\max_{S \subseteq V} \mathbb{E}[c(S)] \leq pn \cdot \frac{n}{2} - p\left(\frac{n}{2}\right)^2 = p \cdot \frac{n^2}{4}$$

c) Markov:

$$\mathbb{P}[c(S) \geq 3] \leq \frac{\mathbb{E}[c(S)]}{3} \leq p \cdot \frac{n^2}{12}$$

d) V' ist eine unabhängige Menge genau dann wenn keiner der Knoten in V' adjazent zu einem anderen Knoten in V' ist. Die Wahrscheinlichkeit dass keine Kante zwischen u und v liegt ist $1-p$. Da bei 5 Knoten gerade 10 Kanten (da $\binom{5}{2} = 10$) infrage kommen zwischen Knoten aus V' zu liegen, gilt:

$$\mathbb{P}[V' \text{ ist unabhängig}] = (1-p)^{10}$$

e) Wenn $G[V']$ gerade dem vollständigen Graphen K_5 entspricht, benötigt man 5 Farben. In allen anderen Fällen sind 4 Farben ausreichend. Somit gilt:

$$\mathbb{P}[G[V'] \text{ ist 4-färbbar}] = 1 - \mathbb{P}[G[V'] = K_5] = 1 - p^{\binom{5}{2}} = 1 - p^{10}$$

Aufgabe 3: Die Probabilistische Methode *(3 Punkte)*

Zeigen Sie mithilfe der Probabilistischen Methode folgende Aussage: Jeder einfache ungerichtete und zusammenhängende Graph G mit n Knoten und m Kanten hat einen bipartiten Partialgraph mit mindestens $m/2$ vielen Kanten.
Hinweis: Es gibt 2 Grundprinzipien auf denen die probabilistische Methode basiert:

1. Wenn ein *zufällig gewähltes* Objekt mit einer positiven Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft besitzt, existiert mindestens ein Objekt mit dieser Eigenschaft. Dieses Prinzip kommt mehrfach im Beweis des Satzes von *Erdős* (Foliensatz 17) zum Einsatz.

2. Jede Zufallsvariable nimmt mindestens einen Wert an, der nicht größer ist und mindestens einen Wert, der nicht kleiner ist, als der Erwartungswert dieser Variable. Sprich, es existiert immer ein x für das $E[X] \leq x$ (bzw. $E[X] \geq x$) gilt. Nutzen Sie dieses Prinzip für die Aufgabe!

Musterlösung

Sei $G = (V, E)$ unser gegebener Graph und $H = (V, E_H)$ ein bipartiter Partialgraph von G. In einem bipartiten Graphen lässt sich die Kontenmenge V in zwei Teilmengen A und B partitionieren, so dass $V = A \dot{\cup} B$ und jeder Knoten aus A nur Nachbarn aus B hat und umgekehrt. Um nun einen bipartiten Partialgraph aus G zu konstruieren, nutzen wir folgenden Zufallsprozess: Jeder Knoten $v \in V$ wird (unabhängig von den anderen Knoten) mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ entweder der Menge A oder der Menge B zugeordnet. Dementsprechend gilt dass jeder Knoten $v \in V$ auch im bipartiten Partialgraph in genau einer der beiden Partitionen vorkommt. Eine Kante $\{u, v\} \in E$ ist auch eine Kante in H wenn u und v in verschiedenen Partitionen liegen. Sei X_e das Ereignis dass eine Kante $\{u, v\} = e \in E$

auch in E_H liegt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_e] &= \mathbb{P}[(u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in B \wedge v \in A)] \\
&= \mathbb{P}[u \in A \wedge v \in B] + \mathbb{P}[u \in B \wedge v \in A] - \underbrace{\mathbb{P}[(u \in A \wedge v \in B) \wedge (u \in B \wedge v \in A)]}_{=0} \\
&= \mathbb{P}[u \in A \wedge v \in B] + \mathbb{P}[u \in B \wedge v \in A] \\
&= \mathbb{P}[u \in A] \cdot \mathbb{P}[v \in B] + \mathbb{P}[u \in B] \cdot \mathbb{P}[v \in A] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sei nun $X = \sum_{e \in E} X_e$ die Anzahl der Kanten in H. Es gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} 1 \cdot \mathbb{P}[X_e] = \sum_{e \in E} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Nach dem Grundprinzip der Probabilistischen Methode muss es also einen bipartiten Partialgraph H geben mit $|E_H| \geq \mathbb{E}[X] = \frac{m}{2}$.

Aufgabe 4: Union Find *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Implementierung der Union Find Datenstruktur durch Wurzelbäume. Sei `SimpleUnion`(x, y) die Operation, welche die Wurzel des Baums mit Element x an die Wurzel des Baums mit Element y anhängt (d.h. ohne Union by Size).

Vergleichen Sie die Laufzeit von n *MakeSet* gefolgt von m *Union/Find* Operationen für die Implementierung mit `SimpleUnion` bzw. Union by Size (jeweils ohne Path Compression).

Musterlösung

Im worst case erhält man bei `SimpleUnion` nach n MakeSet und n Union Operationen einen Baum der Tiefe n. Alle nachfolgenden Find Operationen kosten dann $\Theta(n)$. Die Laufzeit beträgt daher $O(m \cdot n)$ ($m > 0$ angenommen).
Wir zeigen, dass bei Union by Size ein Baum Tiefe $O(\log n)$ hat. Dazu zeigen wir, dass die Tiefe d_x eines jeden Elements x im Baum T_x (d.h. der Abstand von x zur Wurzel von T_x) höchstens $\log |T_x|$ beträgt bzw. andersherum, dass $|T_x| \geq 2^{d_x}$. Für $d_x = 0$ ist dies erfüllt. In einer Union Operation kann sich d_x nur um 1 erhöhen, und zwar genau dann, wenn T_x an einen anderen Baum angehängt wird, welcher gemäß Union by Size mindestens so viele Elemente hat wie T_x. Die Größe von T_x verdoppelt sich also mindestens mit jedem Schritt, in dem d_x um 1 vergrößert wird. Hieraus folgt obige Behauptung, nämlich dass ein Baum mit n Elementen eine Tiefe von maximal $O(\log n)$ hat.
Die Find Operation sucht, gegeben Element x, die Wurzel im Baum T_x, was nach obiger Aussage höchstens $O(\log n)$ Schritte benötigt. Die Union by Size Operation ruft (2 mal) die Find Operation auf um die Wurzeln 2er gegebener Bäume zu finden und hängt anschließend (in konstanter Zeit) die Wurzel des kleineren Baumes an die Wurzel des größeren. Dementsprechend haben Union und Find asymptotisch dieselbe Laufzeit. Somit beträgt die gesamte Laufzeit von m Union/Find Operationen unter Union by Size $O(m \log n)$. Hierzu muss noch die Laufzeit der n MakeSet Operationen ($O(n)$) addiert werden.
n MakeSet gefolgt von m Union/Find Operationen können mittels der Union Find Datenstruktur abhängig von der Implementierung folgende Laufzeit haben:

`SimpleUnion` :	$O(m \cdot n)$
mit Union by Size:	$O(n + m \cdot \log n)$
mit Union By Size und Path Compression (siehe Vorlesung):	$O(n + m \cdot \log^* n)$