

Graphentheorie

15 – Chordale Graphen

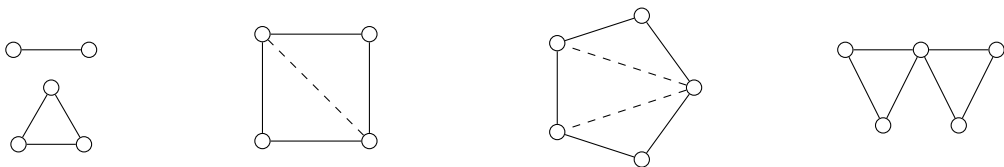
Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Chordale Graphen

Definition 4.15

Ein ungerichteter einfacher Graph heißt *chordal*, wenn jeder elementare Kreis der Länge $k \geq 4$ eine Sehne besitzt.

Eine *Sehne* verbindet zwei Knoten, die im Kreis nicht aufeinander folgen.



Chordale Graphen heißen auch *trianguliert*.

Chordale Graphen

Beobachtung

Falls G chordal ist, so ist auch jeder induzierte Subgraph chordal.

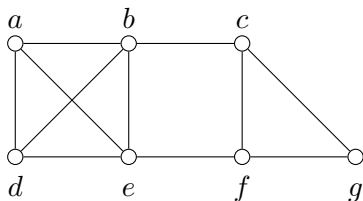
Beweisidee.

Enthält ein induzierter Subgraph von G einen Kreis, so enthält der Subgraph auch alle Sehnen des Kreises die in G enthalten sind.

Definition

Ein Knoten $v \in V(G)$ ist simplizial wenn $N_G(v)$ eine Clique ist.

Bemerkung: $N_G(v)$ ist genau dann eine Clique, wenn $N_G(v) \cup \{v\}$ eine Clique ist.



$$N(a) = \{b, d, e\}$$

$$N(g) = \{c, f\}$$

Simpliziale Knoten

Satz 4.17 (Dirac, 1961)

Jeder chordale Graph $G = (V, E)$ enthält einen simplizialen Knoten.

Beweis, Teil 1.

O.B.d.A.: Graph ist zusammenhängend.

Induktionsanfang: $|V| = 1$ oder G ist vollständig.

Jeder Knoten ist simplizial.

Induktionsschluss:

Annahme: $|V| > 1$ und G ist nicht vollständig.

Sei $W \subset V$. Dann ist $G[W]$ chordal.

Per Induktionsannahme hat $G[W]$ einen simplizialen Knoten.

Finde $W \subset V$ und $w \in W$, so dass:

- w ist simplizial in $G[W]$ und
- w ist simplizial in G

Simpliziale Knoten

Beweis, Teil 2.

Es existiert $U \subset V$ mit folgenden Eigenschaften:

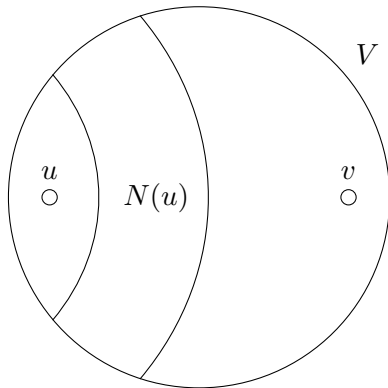
- U ist zusammenhängend
- $U \cup N(U) \neq V$

Hinweis: $N(U) = \bigcup_{u \in U} N(u) \setminus U$

G ist nicht vollständig.

Es gibt Knoten $u, v \in V$ die nicht adjazent sind.

Wähle $U = \{u\}$,
dann $v \notin N(U)$.



Simpliziale Knoten

Beweis, Teil 3.

Sei $U \subset V$ die *größte* zusammenhängende Menge mit $U \cup N(U) \neq V$.

Sei $W = V \setminus (U \cup N(U))$.

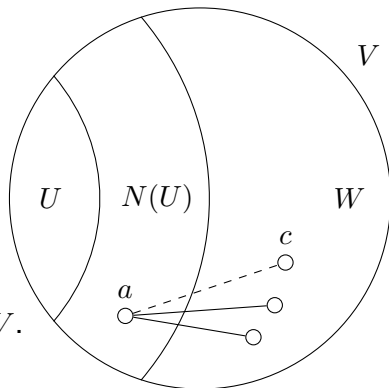
Behauptung: Jeder Knoten aus $N(U)$ ist zu allen Knoten aus W adjazent.

Sei $a \in N(U)$ nicht zu $c \in W$ adjazent.

Wähle $U' = U \cup \{a\}$.

Dann ist U' zusammenhängend und $U' \cup N(U') \neq V$.

Widerspruch zur Maximalität von U . ⚡



Simpliziale Knoten

Beweis, Teil 4.

Sei $U \subset V$ die *größte* zusammenhängende Menge mit $U \cup N(U) \neq V$.

Sei $W = V \setminus (U \cup N(U))$.

Behauptung: $N(U)$ ist eine Clique.

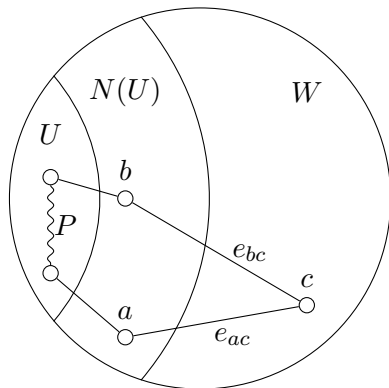
Seien $a, b \in N(U)$ mit $a \neq b$ nicht adjazent.

Sei P der kürzeste Weg von a nach b ,
welcher nur Knoten aus U berührt.

P muss eine Länge von mindestens 2 haben.

Dann ist $P' = P \circ (b, e_{bc}, c, e_{ac}, a)$ mit $c \in W$
ein Kreis mit einer Länge von mindestens 4.

P' hat keine Sehne und G nicht chordal. ⚡



Simpliziale Knoten

Beweis, Teil 5.

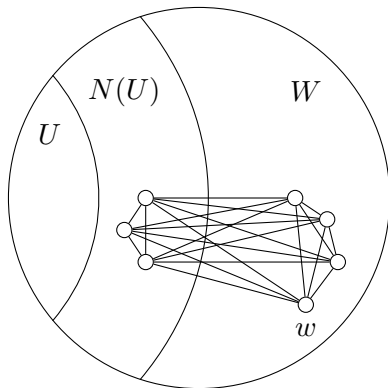
Wähle $w \in W$ simplizial in $G[W]$,
d.h. $N_{G[W]}(w)$ ist eine Clique.

Zusätzlich gilt:

- $N_G(U)$ ist eine Clique
- Jeder Knoten aus $N_G(U)$ ist zu allen Knoten in W adjazent
- w ist zu keinem Knoten aus U adjazent

$N_G(w)$ ist also ebenfalls eine Clique.

Damit ist w simplizial in G .



Chordale Graphen – Perfektheit

Wiederholung:

- G ist perfekt, wenn $\omega(H) = \chi(H)$ für alle induzierten Subgraphen $H \sqsubseteq G$ ist.
- $G - v$ ist der durch $V(G) \setminus \{v\}$ induzierte Subgraph von G .

Korollar 4.18

Jeder chordale Graph $G = (V, E)$ ist perfekt.

Beweis, Teil 1.

Zeige $\omega(G) = \chi(G)$ für chordalen Graphen G . Dann folgt es auch für jeden Subgraphen von G , da diese ebenfalls chordal sind.

Induktionsanfang: $|V| = 1$

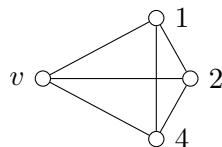
$$\omega(G) = \chi(G) = 1$$

Chordale Graphen – Perfektheit

Beweis, Teil 2.

Induktionsschluss: $|V| > 1$

Wähle simplizialen Knoten $v \in V$.



Induktionsannahme: $\chi(G - v) = \omega(G - v)$

Also reichen $\omega(G) \geq \omega(G - v)$ Farben um $G - v$ zu färben.

Zur Erinnerung: $N(v) \cup \{v\}$ ist eine Clique, d.h. $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$.

Färbe erst $G - v$ mit $\omega(G)$ Farben.

Dann bleibt mindestens eine von $\omega(G)$ Farben für v über, da $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$.

Wir erhalten also Färbung von G mit $\omega(G)$ Farben und damit gilt $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Wie bereits gezeigt gilt auch $\omega(G) \leq \chi(G)$ und damit $\omega(G) = \chi(G)$. □

Perfekte Eliminationsschemata

Beweis ist konstruktiv, d.h. er liefert einen Algorithmus zum Färben mit der minimalen Anzahl von Farben:

- Wähle simplizialen Knoten v
- Färbe $G - v$ per Rekursion
- Färbe v

Der Algorithmus liefert ein perfektes Eliminationsschema.

Definition 4.19

Ein *perfektes Eliminationsschema* ist eine Sequenz v_1, v_2, \dots, v_n aller Knoten von G sodass für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt:
 v_i ist simplizial in $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$.

Perfekte Eliminationsschemata

Satz 4.20

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann chordal, wenn ein perfektes Eliminationsschema existiert.

Beweis, Teil 1.

“ \Rightarrow ”:

Induktionsanfang: $n = 1$

$V = \{v_1\}$ und Sequenz v_1 ist ein perfektes Eliminationsschema

Induktionsschluss: $n > 1$

Es existiert ein simplizialer Knoten v_1 .

Induktionsannahme: $G - v_1$ hat perfektes Eliminationsschema v_2, \dots, v_n .

v_1, v_2, \dots, v_n ist perfektes Eliminationsschema von G .

Perfekte Eliminationsschemata

Beweis, Teil 2.

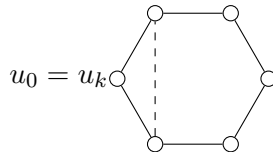
“ \Leftarrow ”:

Sei $C = (u_0, e_1, u_1, \dots, u_k)$ ein elementarer Kreis der Länge $k \geq 4$.

Sei v_1, v_2, \dots, v_n ein perfektes Eliminationsschema.

Sei i minimal, so dass $v_i \in \{u_0, \dots, u_k\}$.

Dann ist $\{u_0, \dots, u_k\} \subseteq \{v_i, \dots, v_n\}$.



O.B.d.A. sei $u_0 = v_i$.

Dann ist u_0 simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ und G enthält Sehne $[u_1, u_{k-1}]$

