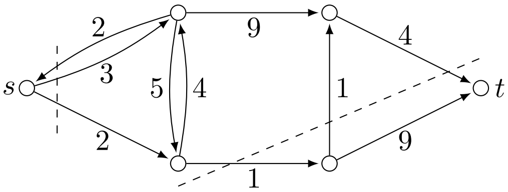
Graphentheorie
12 – Flüsse und Strömungen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Flüsse und Strömungen



Kantengewichte geben Wassermenge in Liter pro Sekunde an.

Frage: Wie viel Wasser kann von der Quelle s zum Ziel t fließen?

Maximaler Fluss = Wie viel Wasser kann von der Quelle zur Senke fließen?

Minimaler Schnitt = Kantenmenge mit minimalem Gewicht, so dass Graph zerfällt.

In diesem Beispiel: Maximale Fluss (5) = Minimaler Schnitt (5).

Flüsse und Strömungen – Begriffe

Im Folgenden:

- $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ist endlicher gerichteter Graph
- Abbildung $c : R \to \mathbb{R}^+$ weist jeder Kante ein *Kapazität* zu
- Abbildung $f : R \to \mathbb{R}_0^+$ weist jeder Kante einen *Flusswert* zu

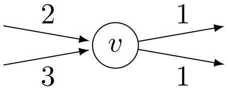
Der *Flussüberschuss* in v ist

$$exzess_f(v) = f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$$

mit

$$f(\delta^+(v)) = \sum_{r \in \delta^+(v)} f(r)$$

$$f(\delta^-(v)) = \sum_{r \in \delta^-(v)} f(r)$$



$$exzess_f(v) = 5 - 2$$

(s, t)-Flüsse

Definition 9.1
Seien $s, t \in V$. Die Abbildung f heißt (s,t)-*Fluss* wenn

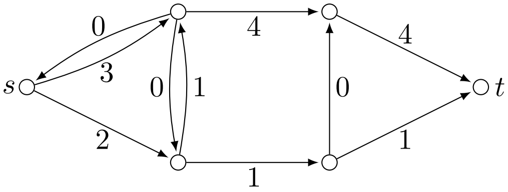
$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \mathit{exzess}_f(v) = 0 \quad .$$

Der Knoten s heißt *Quelle* und t heißt *Senke*.
Der *Wert des Flusses* ist definiert als

$$\mathit{val}(f) := \mathit{exzess}_f(t) \quad .$$

Der Fluss f heißt *zulässig*, falls

$$\forall r \in R : f(r) \leq c(r) \quad .$$



(s,t)-Schnitte

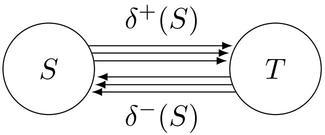
Definition 9.3

Ein *Schnitt* (S,T) ist eine Partition von V, d.h. $V = S \,\dot\cup\, T$.
Ein Schnitt (S,T) mit $s \in S$ und $t \in T$ heißt (s,t)-*Schnitt*.

Vorwärtsteil des Schnittes: $\delta^+(S) = \delta^-(T) := \{r \in R \mid \alpha(r) \in S \wedge \omega(r) \in T\}$

Rückwärtsteil des Schnittes: $\delta^-(S) = \delta^+(T) := \{r \in R \mid \alpha(r) \in T \wedge \omega(r) \in S\}$

$$excess_f(T) := f(\delta^-(T)) - f(\delta^+(T))$$
$$excess_f(S) := f(\delta^-(S)) - f(\delta^+(S))$$



Beobachtung

$$excess_f(T) = -excess_f(S)$$

(s,t)-Schnitte

Lemma 9.4

$exzess_f(T) = \sum_{v\in T} exzess_f(v)$ bzw. $exzess_f(S) = \sum_{v\in S} exzess_f(v)$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in T} exzess_f(v) &= \sum_{v\in T} f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) \\
&= \sum_{v\in T} \left(\sum_{r\in\delta^-(v)} f(r) - \sum_{r\in\delta^+(v)} f(r) \right) \\
&= \sum_{r\in\delta^-(T)} f(r) - \sum_{r\in\delta^+(T)} f(r) \qquad = exzess_f(T)
\end{aligned}
$$

Hinweis: Alle Kanten r mit $\alpha(r) \in T$ und $\omega(r) \in T$ tauchen in der Summe einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auf. □

(s,t)-Schnitte

Lemma 9.5

Für alle (s,t)-Flüsse f und (s,t)-Schnitte (S,T) gilt

$$val(f) = exzess_f(t) = exzess_f(T) = -exzess_f(S) = -exzess_f(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
val(f) &= exzess_f(t) \\
&= \sum_{v \in T} exzess_f(v) && \text{(da } exzess_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s,t\text{)} \\
&= exzess_f(T) \\
&= -\ exzess_f(S) \\
&= -\sum_{v \in S} exzess_f(v) \\
&= -\ exzess_f(s) && \text{(da } exzess_f(v) = 0 \text{ für alle } v \neq s,t\text{)}
\end{aligned}$$

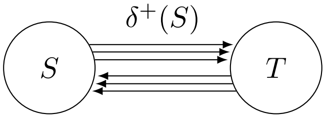
$\square$

Schnitte vs. Flüsse

Definition 9.6

Die *Kapazität* eines Schnittes (S, T) ist

$$c(\delta^+(S)) := \sum_{r \in \delta^+(S)} c(r)$$



Lemma 9.7

Für alle zulässigen (s, t)-Flüsse und (s, t)-Schnitte (S, T) gilt

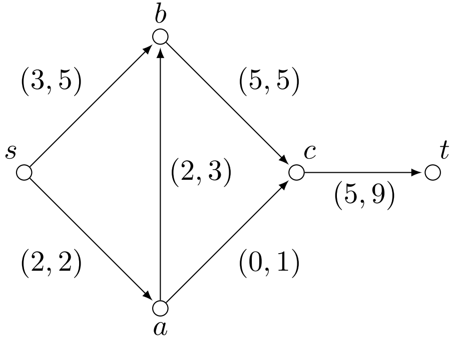
$$val(f) \leq c(\delta^+(S)) \quad .$$

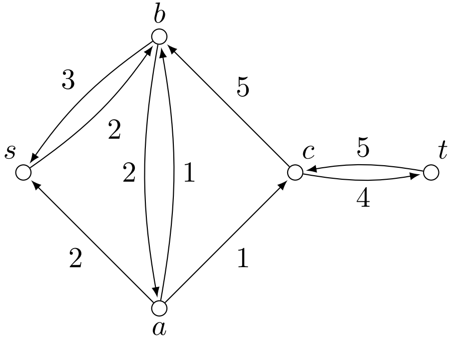
Beweis.

$$val(f) = -exzess_f(S) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) \leq c(\delta^+(S))$$

$\square$

Residualnetze





Kantenbeschriftung:
(Flusswert, Kapazität)

$$s \xrightarrow{2} b \xrightarrow{2} a \xrightarrow{1} c \xrightarrow{4} t$$

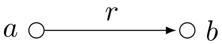
Residualnetze

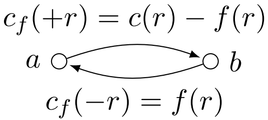
Definition 9.9

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ und c die Kapazitätsfunktion sowie f ein zulässiger Fluss.

Das *Residualnetz* $G_f = (V, R_f, \alpha', \omega')$ mit Kapazitätsfunktion c_f ist definiert durch

- $R_f = \{+r \mid r \in R \ \wedge \ f(r) < c(r)\}$
  $\cup \{-r \mid r \in R \ \wedge \ f(r) > 0\}$
- $\alpha'(+r) = \alpha(r)$ und $\omega'(+r) = \omega(r)$
- $c_f(+r) = c(r) - f(r)$
- $\alpha'(-r) = \omega(r)$ und $\omega'(-r) = \alpha(r)$
- $c_f(-r) = f(r)$





Kanten mit Kapazität 0 sind nicht Teil von G_f!

Residualnetze

Definition 9.10

Ein Weg P von s nach t in G_f heißt *flussvergrößender Weg*.

Wir definieren $\Delta(P) := \min_{r' \in P} c_f(r')$

Der Fluss f wird durch P wie folgt augmentiert:

- Für jede Kante $+r \in P$ wird $f(r)$ um $\Delta(P)$ vergrößert.
- Für jede Kante $-r \in P$ wird $f(r)$ um $\Delta(P)$ verringert.

Da P in t endet, wird $val(f) = exzess_f(t)$ um $\Delta(P)$ erhöht.

Beobachtung 9.11

Falls ein flussvergrößernder Weg existiert, so ist f nicht maximal.

Residualnetze

Lemma 9.12

Seien f und f^* zulässige (s,t)-Flüsse und sei $val(f^*)$ maximal.
Dann gilt $val(f^*) \leq val(f) + c_f(\delta^+_{G_f}(S))$ für alle (s,t)-Schnitte (S,T).

Beweis.

Nach Lemma 9.7 gilt $val(f^*) = val(f) + \varepsilon \leq c(\delta^+(S))$ mit $\varepsilon \geq 0$ und somit

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq c(\delta^+(S)) - val(f) \\
&= c(\delta^+(S)) + exzess_f(S) \\
&= c(\delta^+(S)) - f(\delta^+(S)) + f(\delta^-(S)) \\
&= \sum_{r \in \delta^+(S)} c(r) - f(r) + \sum_{r \in \delta^-(S)} f(r) \\
&= \sum_{+r \in \delta^+_{G_f}(S)} c_f(+r) + \sum_{-r \in \delta^+_{G_f}(S)} c_f(-r) \\
&= c_f(\delta^+_{G_f}(S))
\end{aligned}$$

$\square$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

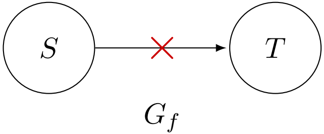
Satz 9.13 (Max-Flow-Min-Cut-Theorem)

$$\max_{f \text{ ist zulässiger } (s,t)\text{-Fluss}} val(f) = \min_{(S,T) \text{ ist } (s,t)\text{-Schnitt}} c(\delta^+(S))$$

Beweis, Teil 1.

Laut Lemma 9.7 gilt $val(f) \leq c(\delta^+(S))$ für alle (s,t)-Schnitte.
Zu zeigen: (s,t)-Schitt mit $c(\delta^+(S)) = val(f)$ existiert.

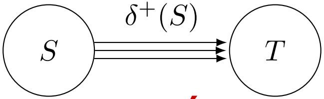
Sei f ein zulässiger (s,t)-Fluss und $val(f)$ maximal.
Wir setzen $S := E_{G_f}(s)$ und $T := V \setminus S$.



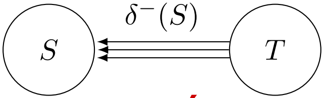
In G_f existiert kein flussvergrößernder Weg.
Damit ist $s \in S$ und $t \in T$ und (S,T) ist ein (s,t)-Schnitt.

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Beweis, Teil 2.



Sei $r \in \delta^+(S)$. Dann gilt $f(r) = c(r)$.
Sonst gäbe es in G_f Kante $+r$ und damit einen Weg von s zu $\omega(r) \in T$. ↯
Damit gilt $f(\delta^+(S)) = c(\delta^+(S))$.



Sei $r \in \delta^-(S)$. Dann gilt $f(r) = 0$.
Sonst gäbe es in G_f Kante $-r$ und damit einen Weg von s zu $\alpha(r) \in T$. ↯
Damit gilt $f(\delta^-(S)) = 0$.

Zusammengefasst: $c(\delta^+(S)) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) = -exzess_f(S) = val(f)$.

$\square$

Satz 9.14 (Augmenting-Path-Theorem)

Ein (s,t)-Fluss f ist genau dann maximal, wenn es keinen flussvergrößernden Weg im Residualnetz G_f gibt.

Ganzzahlige Flüsse

Satz

Ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ mit ganzzahliger Kapazitätsfunktion $c : R \to \mathbb{N}$ hat einen ganzzahligen maximalen Fluss f, d.h. $\forall r \in R : f(r) \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Idee: Induktion über flussvergrößernde Wege

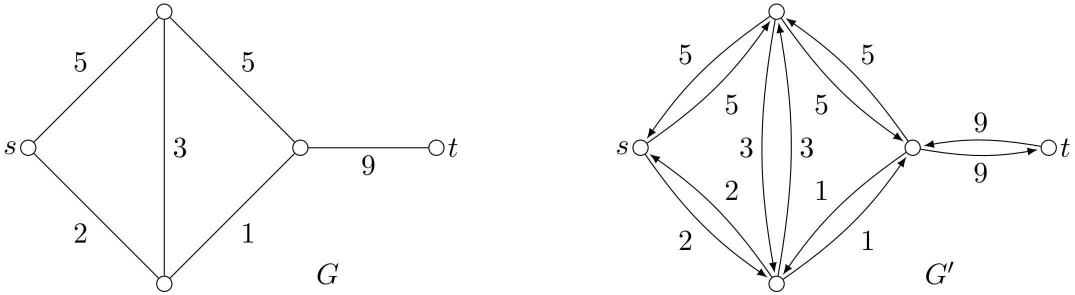
Sei f ein ganzzahliger nicht-maximaler Fluss.
Sei G_f das zu f gehörende Residualnetzwerk.
Sei P ein Weg von s zu t in G_f.

Dann ist $\Delta(P)$ ganzzahlig.
Vergrößere Fluss f entlang P um $\Delta(P)$.
Ergebnis ist ein ganzzahliger Fluss. □

Flüsse in ungerichteten Graphen - Ansatz 1

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Berechne Fluss in gerichtetem Graph $G' = (V, R)$.
Für jede Kante $e = [u, v] \in E$ enthält R zwei Kanten:

- $r = (u, v)$ mit $c(r) = c(e)$
- $r' = (v, u)$ mit $c(r') = c(e)$

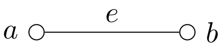


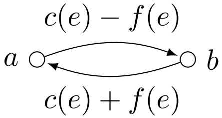
Flüsse in ungerichteten Graphen - Ansatz 2

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Konstruiere gerichtetes Residualnetz $G_f = (V, R_f)$ wie folgt:

Betrachte $e \in E$ mit Kapazität $c(e)$ und Fluss $f(e)$.
Sei $-c(e) \leq f(e) \leq c(e)$ und Richtung von $f(e)$ ist definiert.

$+e \in R_f$ hat Kapazität $c(e) - f(e)$ in Flussrichtung von $f(e)$.
$-e \in R_f$ hat Kapazität $c(e) + f(e)$ in Gegenrichtung von $f(e)$.





Flussvergrößernder Weg benutzt $+e$: $f(e)$ wird vergrößert.
Flussvergrößernder Weg benutzt $-e$: $f(e)$ wird verringert.

Kanten mit Kapazität 0 sind nicht Teil von G_f!