

# Graphentheorie

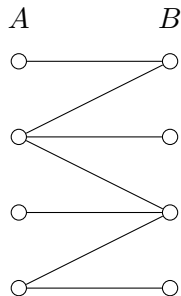
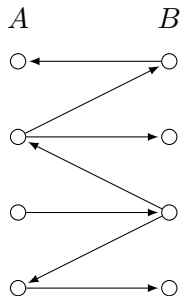
## 13 – Matchings und Knotenüberdeckungen

Dr. Sven Köhler  
Rechnernetze und Telematik  
Technische Fakultät  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

# Bipartite Graphen

## Definition 3.23

Ein Graph  $G$  heißt *bipartit*, wenn es eine Partition  $V(G) = A \dot{\cup} B$  gibt, so dass jede Kante  $r \in R(G)$  bzw.  $e \in E(G)$  mit jeweils einem Knoten aus  $A$  und  $B$  inzident ist.



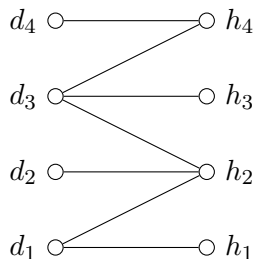
# Matching

## Disunkte Mengen

- Damen  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$
- Herren  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

## Bipartiter Sympathiegraph:

- $G = (D \dot{\cup} H, E)$  mit  $E \subseteq \{[d, h] \mid d \in D \wedge h \in H\}$
- $[d_i, h_j] \in E$  heißt, dass  $d_i$  und  $h_j$  heiraten würden



Kann jeder Herr mit einer Dame verheiratet werden, die ihn auch akzeptiert?  
Der Heiratssatz wird Aufschluss darüber geben, wann genau dies der Fall ist.

# Matching

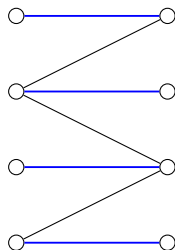
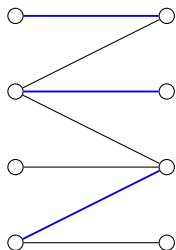
## Definition 4.31

Ein *Matching* ist eine schlingenfreie Menge  $M \subseteq R(G)$  bzw.  $M \subseteq E(G)$  so dass keine zwei Kanten aus  $M$  inzidieren.

$M$  heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten  $v \in V(G)$  mit einer Kante aus  $M$  inzidiert.

Matchingzahl:

$$\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ ist Matching von } G\}$$



# Augmentierende Wege

## Definition 10.9

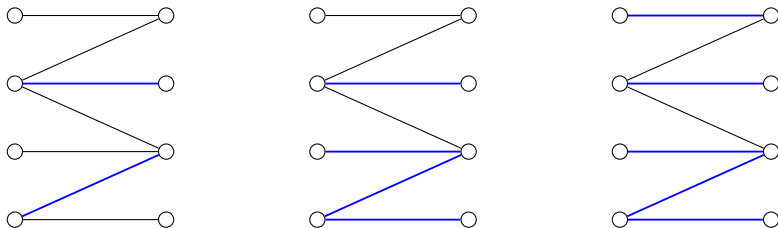
Sei  $M$  ein Matching in einem Graph  $G = (V, E)$ .

Ein Weg  $P$  in  $G$  heißt *alternierender Weg*, wenn er abwechselnd Kanten aus  $E \setminus M$  und  $M$  enthält und  $\alpha(P)$  nicht mit einer Kante aus  $M$  inzidiert.

Ein alternierender Weg heißt *augmentierender Weg*, wenn auch  $\omega(P)$  nicht mit einer Kante aus  $M$  inzidiert.

## Beobachtung

Matching kann entlang des augmentierenden Weges vergrößert werden.



# Heiratssatz

## Satz 9.59 (Heiratssatz)

Bipartiter Graph  $G = (D \cup H, E)$  besitzt genau dann ein perfektes Matching wenn

$$|D| = |H| \quad \text{und} \quad \forall D' \subseteq D : |N(D')| \geq |D'|$$

Hinweis:  $N(D') = \bigcup_{d \in D'} N(d)$ .

### Beweis, Teil 1.

“ $\Rightarrow$ ”:

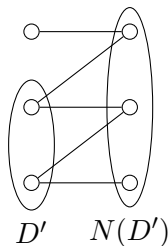
Sei  $M$  ein perfektes Matching und  $D' \subseteq D$ .

Dann verbindet  $M$  jede Dame aus  $D'$  mit einem anderen Herren aus  $N(D')$ .

Damit ist  $|N(D')| \geq |D'|$ .

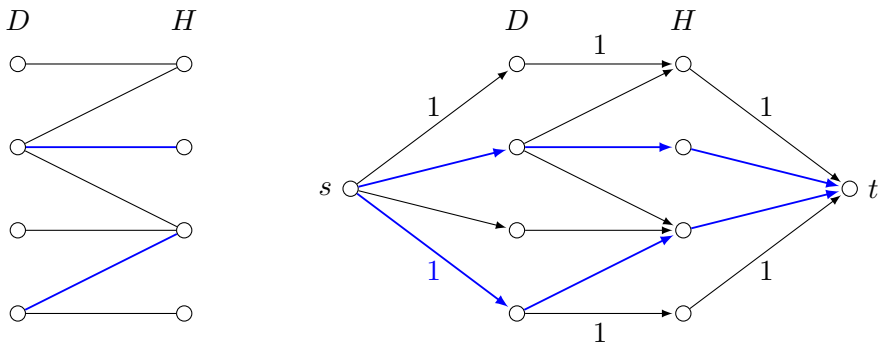
“ $\Leftarrow$ ”:

folgt später



# Bipartites Matching vs. Flüsse

Matching-Problem in bipartiten Graphen hat analoges Flussproblem.  
Alle Kanten haben Kapazität 1.



Erinnerung: Es gibt ganzzahligen maximalen Fluss.  
Matching  $M$  enthält alle Kanten mit Flusswert 1.

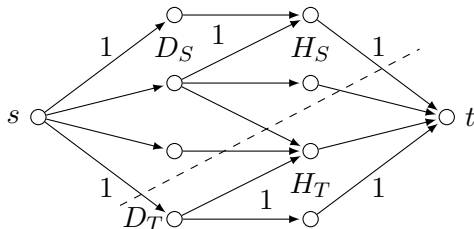
# Heiratssatz

## Beweis, Teil 2.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $|N(D')| \geq |D'|$  für alle  $D' \subseteq D$ .

Betrachte analoges Flussproblem und  $(s, t)$ -Schnitt  $(S, T)$ .

Sei  $D_S = D \cap S$  und  $D_T = D \cap T$  sowie  $H_S = H \cap S$  und  $H_T = H \cap T$ .



$$\begin{aligned}
 c(\delta^+(S)) &= \sum_{r \in \delta^+(S)} c(r) \geq |D_T| + |N^+(D_S) \cap H_T| + |H_S| \\
 &\geq |D_T| + |N^+(D_S) \cap H_T| + |N^+(D_S) \cap H_S| \\
 &= |D_T| + |N^+(D_S)| \geq |D_T| + |D_S| = |D|
 \end{aligned}$$

□



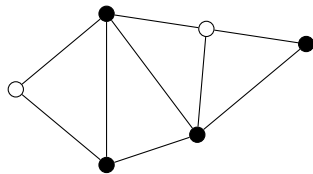
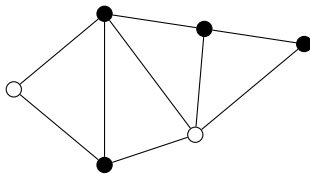
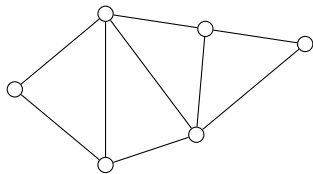
# Knotenüberdeckung

## Definition 4.30

Knotenüberdeckung (Vertex Cover) eines Graphen  $G$  ist Menge  $S \subseteq V(G)$ , so dass jede Kante zu mindestens einem Knoten aus  $S$  inzident ist.

Knotenüberdeckungszahl:

$$\tau(G) := \min\{|S| : S \text{ ist Knotenüberdeckung von } G\}$$



# Matching vs. Knotenüberdeckung

---

## Satz 4.32

Für jedes Matching  $M$  und jede Knotenüberdeckung  $S$  eines Graphen  $G$  gilt

$$|M| \leq |S|$$

## Beweis.

Von jeder Kante  $e \in M$  muss  $S$  mind. einen Endknoten enthalten.

Keine zwei Kanten aus  $M$  sind zueinander inzident,

d.h. alle Endknoten von Kanten aus  $M$  sind voneinander verschieden.



# Matching vs. Knotenüberdeckung

---

## Lemma

Für jeden Graph  $G$  gilt  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ .

## Proof.

Sei  $M$  ein Matching von  $G$  mit  $|M| = \nu(G)$ .

Sei  $S$  die Menge aller Endknoten der Kanten aus  $M$ .

$S$  ist eine Knotenüberdeckung. Sonst gäbe es Kante  $e$  ohne Endknoten aus  $S$  und  $M \cup \{e\}$  wäre ebenfalls ein Matching von  $G$ . □

## Korollar

Für jeden Graph  $G$  gilt  $\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G)$ .

Wert von  $\nu(G)$  kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Berechnung von  $\tau(G)$  ist für allgemeine Graphen NP-schwer.

Daher beschäftigen wir uns nun mit Approximationsalgorithmen.

# Knotenüberdeckung

---

---

## Algorithmus 4.3 Approximationsalgorithmus für Knotenüberdeckung

---

**Eingabe:** ungerichteter Graph  $G = (V, E)$

$S := \emptyset$

$M := \emptyset$

**for each**  $e = [v, u] \in E$  **do**

**if**  $M \cup \{e\}$  is Matching of  $G$  **then**

$S := S \cup \{v, u\}$

$M := M \cup \{e\}$

**return**  $S$

---

Bemerkung:

$M \cup \{e\}$  ist genau dann ein Matching von  $G$ , wenn  $\{v, u\} \cap S = \emptyset$ .

# Knotenüberdeckung

---

## Satz 4.33

Algorithmus 4.3 berechnet eine 2-Approximation, d.h.  $|S| \leq 2\tau(G)$ .

Die Laufzeit ist  $\mathcal{O}(m)$ .

## Beweis.

$M$  ist bezüglich Inklusion maximal, d.h. es gibt kein Matching  $M' \supset M$ .

Daraus folgt: Wenn  $e \notin M$ , dann ist  $e$  mit einer Kante  $e' \in M$  inzident.

Wenn  $e \in M$ :  $S$  enthält die Endknoten von  $e$

Wenn  $e \notin M$ :  $S$  enthält die Endknoten von  $e'$

Damit ist  $S$  eine Knotenüberdeckung.

Die Mächtigkeit von  $S$  lässt sich wie folgt abschätzen:

$$|S| = 2|M| \leq 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$$



# Satz von König

---

## Satz 9.60 (Satz von König, 1931)

Für jeden bipartiten Graphen  $G$  gilt  $\nu(G) = \tau(G)$ .

### Beweis, Teil 1.

$\nu(G) \leq \tau(G)$  folgt aus Satz 4.32.

Zu zeigen:  $\nu(G) \geq \tau(G)$

Grundidee:

Knotenüberdeckung  $\cong$  min. cut

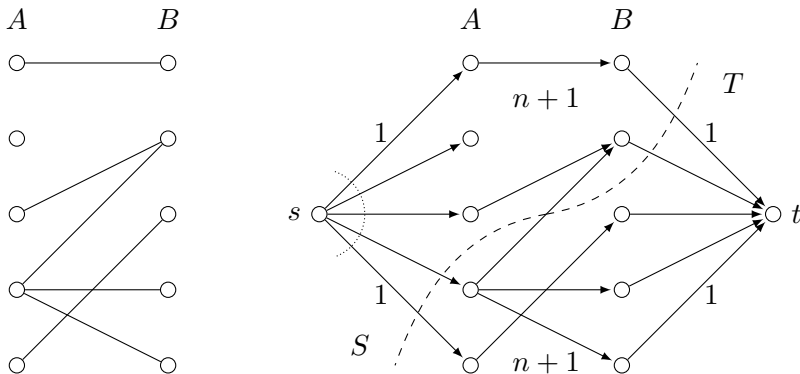
Matching  $\cong$  max. flow

# Satz von König

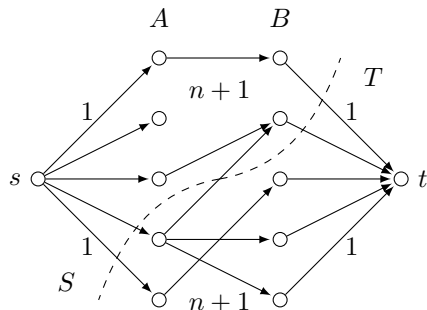
## Beweis, Teil 2.

Sei  $G = (A \dot{\cup} B, E)$  bipartiter Graph.

Betrachte folgendes Flussproblem, wobei  $n = |A|$ :



# Satz von König



## Beweis, Teil 3.

Schnitt  $(\{s\}, A \cup B \cup \{t\})$  hat Kapazität  $n$ .

Betrachte minimalen  $(s, t)$ -Schnitt  $(S, T)$ .

$\delta^+(S)$  enthält keine Kanten mit Kapazität  $n+1$ ,

d.h. es gibt keine Kanten von  $(A \cap S)$  nach  $(B \cap T)$ .

Damit ist  $C = (A \cap T) \cup (B \cap S)$  eine Knotenüberdeckung in  $G$ .

Die Kapazität des Schnittes ist  $|C| = |A \cap T| + |B \cap S|$ .

Matching entspricht maximalem Fluss.

Wegen Satz 4.32 ist  $C$  kleinste Knotenüberdeckung.

