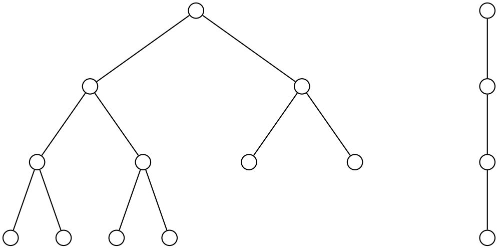
Graphentheorie
09 – Bäume und Wälder

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bäume und Wälder

Definition 6.1
Ein ungerichteter einfacher kreisfreier Graph G heißt *Wald*.
Ist G zusätzlich zusammenhängend, dann heißt G *Baum*.

Hinweis: Ein einzelner Baum ist auch ein Wald.



Bäume – Eigenschaften

Satz 6.3

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Folge Aussagen sind äquivalent:

1) G ist ein Baum
2) G enthält keinen elementaren Kreis,
   aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v.
4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
6) G enthält keinen elementaren Kreis und $|E| = |V| - 1$

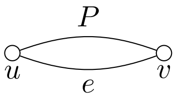
Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1)

Bäume – Eigenschaften

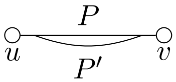
1) G ist ein Baum
2) G enthält keinen elementaren Kreis,
   aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v.

Beweisskizze.

1) $\Rightarrow$ 2):
Sei $H = (V', E')$ Obergraph mit $V' = V$ und $E' \supset E$.
Betrachte Kante $e = [u, v] \in E' \setminus E$.
Baum G is zusammenhängend und kreisfrei.
Es existiert elementarer Weg P von v zu u in G.
$P \circ (u, e, v)$ ist elementarer Kreis in H.



2) $\Rightarrow$ 3):
Annahme: Es gibt zwei Wege von u nach v.
Dann hat G einen elementaren Kreis. ↯

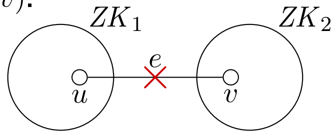


Bäume – Eigenschaften

3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v.
4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Beweisskizze.

3) $\Rightarrow$ 4):
Sei $e = [u, v] \in E$.
Es gibt genau einen Weg von u nach v, nämlich $P = (u, e, v)$.
Dann gibt es in $G - e$ keinen Weg von u nach v.
Damit ist $G - e$ nicht zusammenhängend.



4) $\Rightarrow$ 5):
Sei $|E| \neq |V| - 1$. Beobachtung:
Graphen mit $|V| - 2$ Kanten sind nicht zusammenhängend. $\lightning$
Graphen mit $|V|$ Kanten müssen einen Kreis haben. $\lightning$ $\square$

Bäume – Eigenschaften

5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
6) G enthält keinen elementaren Kreis und $|E| = |V| - 1$
1) G ist ein Baum

Beweisskizze.

5) $\Rightarrow$ 6):
Annahme: G zusammenhängend und besitzt elementaren Kreis C.
Entferne eine Kante von C.
Dann ist G immer noch zusammenhängend.
G hat aber nur $|V| - 2$ Kanten. $\lightning$

6) $\Rightarrow$ 1):
Laut 6) ist G is kreisfrei. Zu zeigen: G ist zusammenhängend.
Annahme: G kreisfrei mit genau zwei Zusammenhangskomponenten ZK_1, ZK_2.
Es gilt $ZK_1 \cup ZK_2 = V$ bzw. $|ZK_1| + |ZK_2| = |V|$.
Damit hat G genau $|ZK_1| - 1 + |ZK_2| - 1 = |V| - 2$ Kanten. $\lightning$ $\square$

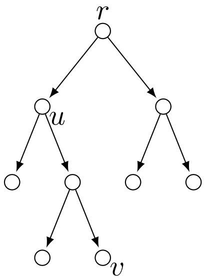
Gerichtete Bäume

Definition 6.41

Sei $G = (V, R)$ ein gerichteter einfacher kreisfreier Graph. G heißt r-*Wurzelbaum*, wenn $E_G(r) = V$ und der zu G zugeordnete Graph ein (ungerichteter) Baum ist. Knoten mit $g^+(v) = 0$ heißen *Blätter* und r heißt *Wurzelknoten*.

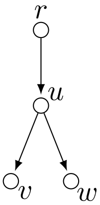
Knoten u und $v \in E_G(u) \setminus \{u\}$:

- u heißt *Vorfahre* von v
- v heißt *Nachfahre* von u



Knoten u und $v, w \in N_G^+(u)$:

- u heißt *Elternknoten* von v
- v heißt *Kindknoten* von u
- v und w sind *Geschwisterknoten*



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Satz 6.42

Sei G ein gerichteter Graph. Folge Aussagen sind äquivalent:

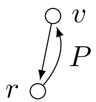
1) G ist ein r-Wurzelbaum
2) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) = 1$ für alle $v \neq r$
   und der zu G zugeordenete Graph ist ein Baum
3) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \neq r$
   und $E_G(r) = V(G)$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

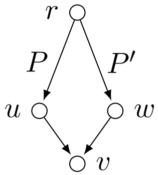
Beweisskizze.
1) $\Rightarrow$ 2):
Sei G ein r-Wurzelbaum. Dann gilt $E_G(r) = V(G)$.

Annahme: $g^-(r) > 0$.
Sei v Vorgänger von r. Dann ist $v \in E_G(r)$.
Es gibt also Weg von r zu v und von v zu r.
Somit existiert ein Kreis in G. $\lightning$



Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) = 0$
Dann $v \notin E_G(r)$. $\lightning$

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) > 1$
Es gibt mind. 2 Wege von r zu v.
Somit existiert ein Kreis im zugeordneten Graph. $\lightning$



$\square$

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.
2) $\Rightarrow$ 3):

Laut 2) gilt sicherlich $g^-(r) = 0$ und $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \neq r$.
Zu zeigen: $E_G(r) = V(G)$

Sei $v \notin E_G(r)$.

a) v liegt auf einem Kreis.
Dann ist der zu G zugeordnete Graph kein Baum $\lightning$

b) v liegt nicht auf einem Kreis.
Starte bei v und folge Kanten in umgekehrter Richtung bis Knoten v' mit $g^-(v') = 0$ erreicht ist.
Es gilt $v \in E_G(v')$.
Da $v \notin E_G(r)$ muss $v' \neq r$ gelten $\lightning$

$\square$

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

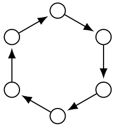
3) $\Rightarrow$ 1):

Laut 3) gilt $E_G(r) = V(G)$ und $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

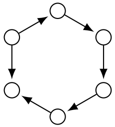
Sei H der zu G zugeordnete Graph.

Zu zeigen: H ist ein Baum.

Annahme: H enthält einen Kreis K



a) Orientiere alle Kanten von K in die gleiche Richtung.
Liegt r auf dem Kreis, dann $g^-_G(r) = 1$ ↯
Liegt r nicht auf dem Kreis, dann ist der Kreis von r nicht erreichbar ↯
denn $g^-_G(v) \leq 1$ für alle v.



b) Orientiere nicht alle Kanten in die gleiche Richtung.
Es gibt einen Knoten mit $g^-_G(v) \geq 2$ ↯

$\square$