# Graphentheorie
# 14 – Färbungen, Cliquen, Perfekte Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

# Färbungen

**Hinweis:** Im Folgenden betrachten wir einfache ungerichtete Graphen $G = (V, E)$.

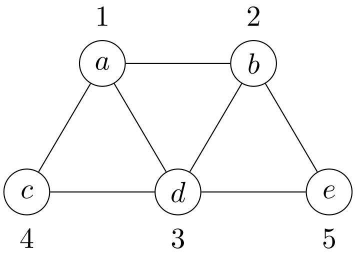
## Definition 4.8

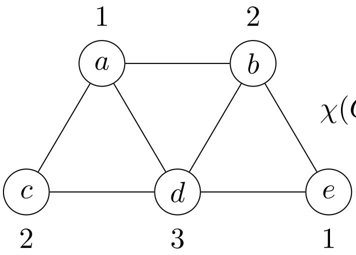
Eine $k$-*Färbung* ist eine surjektive Abbildung $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ so dass

$$\forall [u, v] \in E : f(u) \neq f(v)$$

*Farbklasse* $i$ ist definiert durch $f^{-1}(i) = \{v \in V \mid f(v) = i\}$

*Chromatische Zahl* von $G$ ist $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ es existiert $k$-Färbung von $G\}$



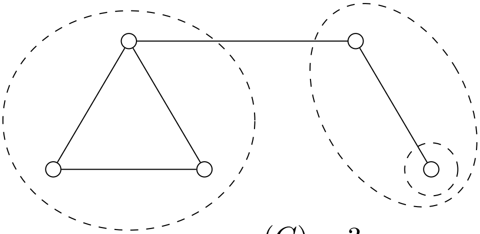




$\chi(G) = 3$

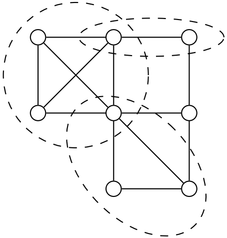
# Cliquen

## Definition 4.1

Eine Teilmenge $C \subseteq V$ heißt *Clique* wenn $\forall u, v \in C : u = v \ \lor \ [u, v] \in E$



$\omega(G) = 3$



$\omega(G) = 4$

## Definition 4.2

Die Cliquenzahl ist definiert als $\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$

# Chromatische Zahl vs. Cliquenzahl

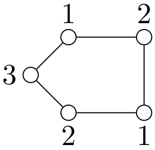
## Beobachtung

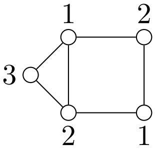
$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

## Beweis.

Sei $C$ die größte Clique in $G$.
Man benötigt mind. $|C|$ Farben um die Knoten in $C$ zu färben. $\square$

$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = 3$

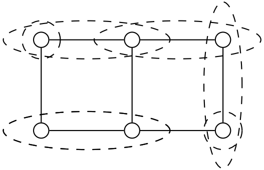



$\omega(G) = 3$
$\chi(G) = 3$

Für perfekte Graphen gilt: $\chi(G) = \omega(G)$

# Cliquenzerlegung




## Definition 4.3

Eine *Cliquenzerlegung* ist eine Partition

$$V = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \ldots \dot\cup C_k \quad ,$$

sodass jedes $C_i$ eine Clique in $G$ ist.

Die *Cliquenzerlegungszahl* ist
$\bar{\chi}(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid$ es existiert Cliquenzerlegung $C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \ldots \dot\cup C_k\}$

Beispiele:

- jeder vollständige Graph: $\bar{\chi}(G) = 1$
- jeder Graph ohne Kanten: $\bar{\chi}(G) = n$

Gibt es immer eine Cliquenzerlegung?

# Unabhängige Mengen

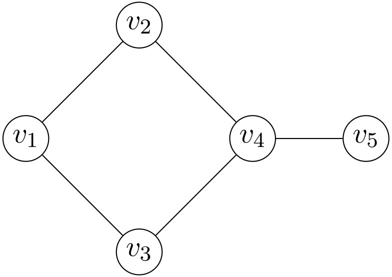
## Definition 4.4

Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* falls

$$\forall u, v \in U : v = u \ \vee \ [u, v] \notin E$$

Die *Unabhängikeitszahl* ist
$\alpha(G) := \max\{|U| \mid U$ ist unabhängige Menge in $G\}$

Beispiel für unabhängige Mengen:
$U = \{v_4\}$
$U = \{v_1, v_4\}$
$U = \{v_2, v_3, v_5\}$



# Unabhängikeitszahl vs. Cliquenzerlegungszahl

## Beobachtung

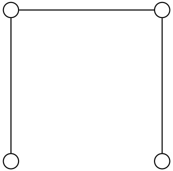
$$\alpha(G) \le \bar{\chi}(G)$$

## Beweis.

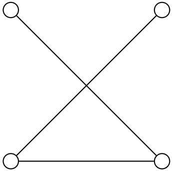
Von jeder Clique kann man höchstens einen Knoten nehmen. $\square$

## Definition 4.6

Ein *Komplementgraph* $\bar{G} = (V, \bar{E})$ eines einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist definiert durch $\bar{E} = \{[u, v] \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge [u, v] \notin E\}$.



$G$

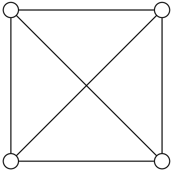


$\bar{G}$

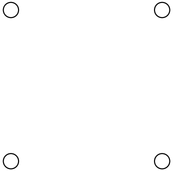
# Komplementgraphen

## Beobachtung

- $\bar{\bar{G}} = G$
- $|E| + \left|\bar{E}\right| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $S \subseteq V$ ist genau dann eine Clique in $G$, wenn $S$ unabhängig in $\bar{G}$ ist
- $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$ bzw. $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$



$G$



$\bar{G}$

# Chromatische Zahl vs. Unabhängikeitszahl

## Beobachtung

$$\chi(G) \geq \tfrac{n}{\alpha(G)} \quad \text{bzw.} \quad \chi(G)\alpha(G) \geq n$$

## Beweis.

Farbklassen $1$, $2$, bis $\chi(G)$ sind unabhängige Mengen.
Jede unabhängige Menge enthält höchstens $\alpha(G)$ Knoten.

Sei $f$ eine $\chi(G)$-Färbung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{\chi(G)} \left|f^{-1}(i)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) \\ &= \chi(G)\alpha(G) \end{aligned}$$

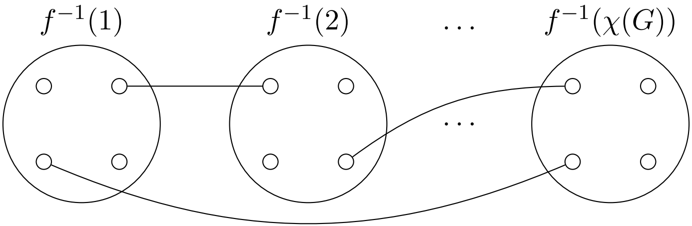
□

# Schranke für Chromatische Zahl

## Beobachtung

$$\chi(G) \leq \tfrac{1}{2} + \sqrt{2m + \tfrac{1}{4}}$$

## Beweis, Teil 1.




Sei $k = \chi(G)$. Zwischen zwei Farbklassen $f^{-1}(i)$ und $f^{-1}(j)$ muss es mind. eine Kante geben. Sonst könnte man alle Knoten von $f^{-1}(j)$ mit der Farbe $i$ färben.

Damit gilt $m \geq \binom{k}{2} = k(k-1)/2$.

# Schranke für Chromatische Zahl

## Beweis, Teil 2.

$$
\begin{aligned}
& & k(k-1)/2 &\leq m \\
&\Rightarrow & k^2 - k &\leq 2m \\
&\Rightarrow & k^2 - k + \frac{1}{4} &\leq 2m + \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow & \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq 2m + \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow & k - \frac{1}{2} &\leq \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \\
&\Rightarrow & k &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

$\square$

# Schranke für Chromatische Zahl

Beispiel für Gleichheit:
Für vollständige Graphen gilt $m = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\chi(G) = n$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} &= n \\
\sqrt{2m + \frac{1}{4}} &= n - \frac{1}{2} \\
n(n-1) + \frac{1}{4} &= n^2 - n + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

**Hinweis**:
Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die Chromatische Zahl, Cliquenzahl und Unabhängigkeitszahl effizient zu berechnen.
Beschränkt man sich auf bestimmte Klassen von Graphen, wird es möglich diese Größen effizient zu bestimmen.

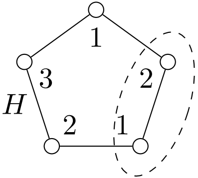
# Perfekte Graphen

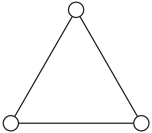
## Definition

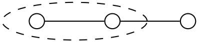
Ein einfacher ungerichteter Graph $G$ heißt *perfekt*, falls für jeden induzierten Subgraph $H$ gilt:

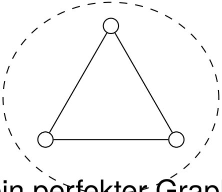
$$\omega(H) = \chi(H)$$

$\omega(H) = 2$
$\chi(G) = 3$







ein nicht perfekter Graph

ein perfekter Graph

# Perfekte Graphen

Beispiele für perfekte Graphen:

- Bipartite Graphen
- Vollständige Graphen
- Chordale Graphen

**Satz (Satz von Lovász (1972))**

Ein Graph $G$ ist genau dann perfekt, wenn $\bar{G}$ perfekt ist.

Ohne Beweis.

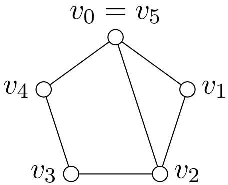
# Löcher und Antilöcher

## Definition

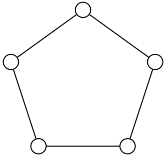
Ein *Loch* ist ein elementarer Kreis $C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_k)$ von ungerader Länge $k \geq 5$ welcher keine Sehne hat. Eine Sehne verbindet zwei von $C$ berührte Knoten, die in $C$ nicht aufeinander folgen.

$C$ hat Sehne wenn $[v_i, v_j] \in E$ mit ( $i = 0$ und $j \in [2, k-2]$ )
oder ( $i > 0$ und $j \in [i+2, k-1]$ ).

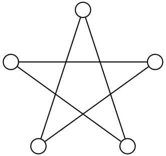
Ein *Antiloch* ist ein Loch im Komplementgraph.




Kreis mit Sehne

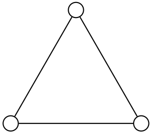


ein Loch

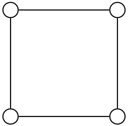


ein Antiloch

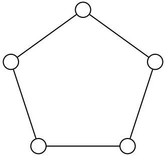
# Löcher und Antilöcher – weitere Beispiele



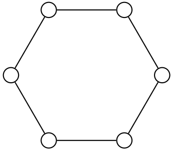
$C_3$



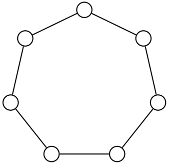
$C_4$



$C_5$

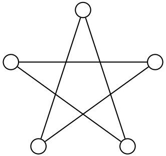


$C_6$

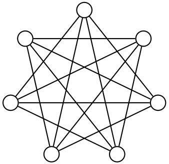


$C_7$

$C_5$ und $C_7$ sind ein Löcher. $C_3$, $C_4$ und $C_6$ sind keine Löcher.



$\bar{C}_5$



$\bar{C}_7$

# Strong Perfect Graph Theorem

**Satz (Strong Perfect Graph Theorem)**

Ein einfacher ungerichteter Graph $G$ ist genau dann perfekt, wenn er kein Loch oder Antiloch enthält.

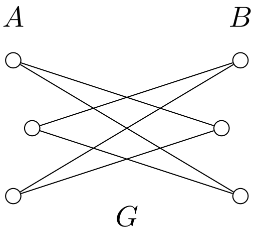
Die Vermutung wurde 1961 von Claude Berge aufgestellt und im Jahre 2002 von Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour und Robin Thomas bewiesen.

In perfekten Graphen kann man $\alpha(G)$, $\omega(G)$, $\chi(G)$ und $\bar{\chi}(G)$ in polynomieller Zeit berechnen.

# Strong Perfect Graph Theorem

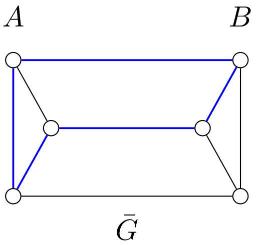
## Korollar

Jeder bipartite Graph ist perfekt.




## Beweisskizze, Teil 1.

Sei $G = (A \dot\cup B, E)$ ein bipartiter Graph.
Jeder Kreis in $G$ hat gerade Länge,
kann also kein Loch sein.

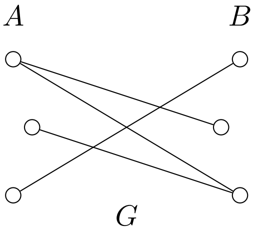



Betrachte $\bar{G} = (A \dot\cup B, \bar{E})$.
Mengen $A$ und $B$ sind Cliquen.
Annahme:
Kreis hat 2 aufeinanderfolgenden Kanten aus $\bar{G}[A]$.
Dann hat der Kreis eine Sehne.

# Strong Perfect Graph Theorem

## Korollar

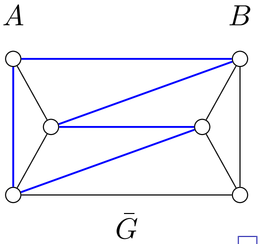
Jeder bipartite Graph ist perfekt.




## Beweisskizze, Teil 2.

Betrachte $\bar{G} = (A \dot{\cup} B, \bar{E})$.
Mengen $A$ und $B$ sind Cliquen.
Annahme:
Kreis hat 1 Kante aus $\bar{G}[A]$,
aber keine 2 folgen aufeinander.
Dann hat der Kreis eine Sehne.

$\bar{G}$ kann also auch keine Löcher enthalten.




$\square$