Graphentheorie
01 – Gerichtere Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Gerichtete Graphen

Definition 2.1

Ein *gerichteter Graph* ist ein Tupel $G = (V, R, \alpha, \omega)$ mit

- $V =$ Ecken/Knotenmenge,
- $R =$ Pfeil/Kantenmenge,
- $V \cap R = \emptyset$
- $\alpha, \omega : R \to V$.

Jeder Kante wird durch α und ω genau ein Start- bzw. Endknoten zugeordnet.
Der Graph G ist *endlich* wenn V und R endlich sind.

$$
\begin{aligned}
V(G) &= \text{Ecken/Knotenmenge von } G \\
R(G) &= \text{Pfeil/Kantenmenge von } G \\
&= \{\{(\alpha(r), \omega(r)) \mid r \in R\}\} \text{ (Multimenge)}
\end{aligned}
$$

Konvention: $n = |V|$ und $m = |R|$.

Gerichtete Graphen

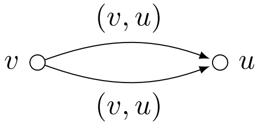
Definition 2.1

Ein *gerichteter Graph* ist ein Tupel $G = (V, R, \alpha, \omega)$ mit

- V = Ecken/Knotenmenge,
- R = Pfeil/Kantenmenge,
- $V \cap R = \emptyset$
- $\alpha, \omega : R \to V$.

Jeder Kante wird durch α und ω genau ein Start- bzw. Endknoten zugeordnet.
Der Graph G ist *endlich* wenn V und R endlich sind.

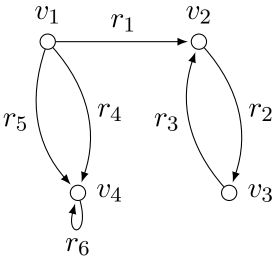
$V(G)$ = Ecken/Knotenmenge von G
$R(G)$ = Pfeil/Kantenmenge von G
$\quad = \{\{(\alpha(r), \omega(r)) \mid r \in R\}\}$ (Multimenge)



Konvention: $n = |V|$ und $m = |R|$.

Gerichtete Graphen – Beispiele

Endlicher Graph:



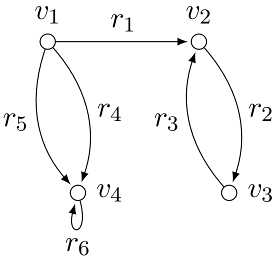
$V = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

$R = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		
r_6		

Gerichtete Graphen – Beispiele

Endlicher Graph:



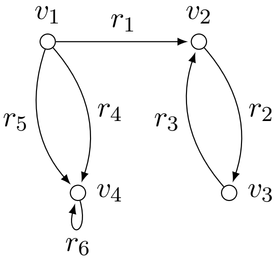
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$R = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		
r_6		

Gerichtete Graphen – Beispiele

Endlicher Graph:



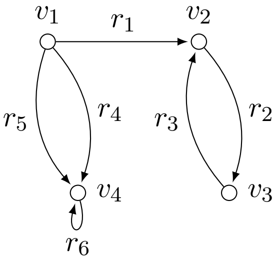
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$

	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		
r_6		

Gerichtete Graphen – Beispiele

Endlicher Graph:



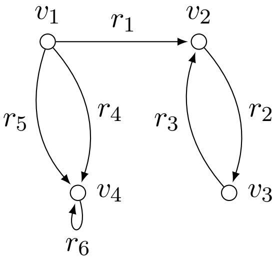
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$

	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1	v_1	v_2
r_2	v_2	v_3
r_3	v_3	v_2
r_4	v_1	v_4
r_5	v_1	v_4
r_6	v_4	v_4

Gerichtete Graphen – Beispiele

Endlicher Graph:



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

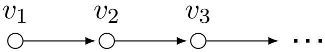
$$R = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$$

	$\alpha(r_i)$	$\omega(r_i)$
r_1	v_1	v_2
r_2	v_2	v_3
r_3	v_3	v_2
r_4	v_1	v_4
r_5	v_1	v_4
r_6	v_4	v_4

Unendlicher Graph:

$$V(G) = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$R(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$



Gerichtete Graphen – Schlingen, Parallelen

Definition 2.2

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $r, r' \in R$.

- Kante $r \in R$ heißt *Schlinge* wenn $\alpha(r) = \omega(r)$.
- Graph G heißt *schlingenfrei* wenn $\forall r \in R : \alpha(r) \neq \omega(r)$.
- Kanten r, r' heißen *parallel* wenn $r \neq r'$, $\alpha(r) = \alpha(r')$ und $\omega(r) = \omega(r')$.
- Kanten r, r' heißen *antiparallel* wenn $r \neq r'$, $\alpha(r) = \omega(r')$ und $\omega(r) = \alpha(r')$.

Der Graph G heißt *einfach*, wenn er keine Schlingen oder Parallelen enthält.
(Antiparallelen dürfen enthalten sein.)

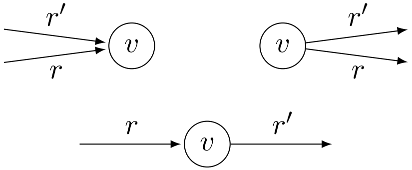
Vereinfachte Notation für Graphen ohne Parallelen:
$G = (V, R)$ mit $R \subseteq V \times V$, wobei $(v, u) \in R$ eine Kante von v nach u beschreibt.
Wenn $v = u$, dann ist (v, u) eine Schlinge.

Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

Definition 2.3

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $r, r' \in R$.
Knoten v und Kante r heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $r \in R$ existiert, so dass r zu v und u inzident ist.

Beispiele Inzidenz:

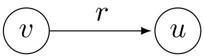


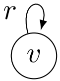
Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

Definition 2.3

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $r, r' \in R$.
Knoten v und Kante r heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $r \in R$ existiert, so dass r zu v und u inzident ist.

Beispiele Adjazenz:



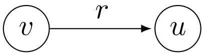


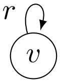
Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

Definition 2.3

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $r, r' \in R$.
Knoten v und Kante r heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $r \in R$ existiert, so dass r zu v und u inzident ist.

Beispiele Adjazenz:





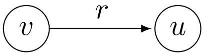
Ist v zu sich selbst adjazent?

Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

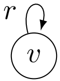
Definition 2.3

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $r, r' \in R$.
Knoten v und Kante r heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $r \in R$ existiert, so dass r zu v und u inzident ist.

Beispiele Adjazenz:



ja!



ja!

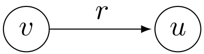
Ist v zu sich selbst adjazent?

Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

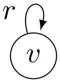
Definition 2.3

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $r, r' \in R$.
Knoten v und Kante r heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $r \in R$ existiert, so dass r zu v und u inzident ist.

Beispiele Adjazenz:



ja!



ja!

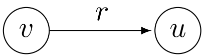
Ist v zu sich selbst adjazent? Die Definition ist fehlerhaft!

Gerichtete Graphen – Inzidenz, Adjazenz

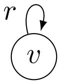
Definition 2.3 (korrigiert)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph.
Knoten $v \in V$ und Kante $r \in R$ heißen *inzident* wenn $\alpha(r) = v$ oder $\omega(r) = v$.
Kanten r, r' heißen *inzident*, wenn $\{\alpha(r), \omega(r)\} \cap \{\alpha(r'), \omega(r')\} \neq \emptyset$.
Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart*,
wenn $\exists r \in R : \{\alpha(r), \omega(r)\} = \{v, u\}$.

Beispiele Adjazenz:



nein!



ja!

Ist v zu sich selbst adjazent?

Gerichtete Graphen – Nachbarn, Grad

Definition 2.3 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Für $v \in V$ definieren wir:

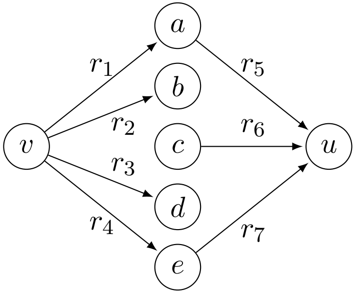
- $\delta_G^+(v) := \{r \in R \mid \alpha(r) = v\}$ — ausgehende Kanten
- $\delta_G^-(v) := \{r \in R \mid \omega(r) = v\}$ — eingehende Kanten
- $N_G^+(v) := \{\omega(r) \mid r \in \delta_G^+(v)\}$ — Nachfolgermenge
- $N_G^-(v) := \{\alpha(r) \mid r \in \delta_G^-(v)\}$ — Vorgängermenge
- $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ — Nachbarn von v

Gerichtete Graphen – Nachbarn, Grad

Definition 2.3 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Für $v \in V$ definieren wir:

- $\delta_G^+(v) := \{r \in R \mid \alpha(r) = v\}$ — ausgehende Kanten
- $\delta_G^-(v) := \{r \in R \mid \omega(r) = v\}$ — eingehende Kanten
- $N_G^+(v) := \{\omega(r) \mid r \in \delta_G^+(v)\}$ — Nachfolgermenge
- $N_G^-(v) := \{\alpha(r) \mid r \in \delta_G^-(v)\}$ — Vorgängermenge
- $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ — Nachbarn von v



Beispiele:

- $\delta^+(v) = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ und $\delta^+(b) = \emptyset$
- $\delta^-(u) = \{r_5, r_6, r_7\}$ und $\delta^-(c) = \emptyset$
- $N^+(v) = \{a, b, d, e\}$ und $N^+(b) = \emptyset$
- $N^-(u) = \{a, c, e\}$ und $N^-(c) = \emptyset$

Das Subskript G wird gerne weggelassen!

Gerichtete Graphen – Nachbarn, Grad

Definition 2.3 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Für $v \in V$ definieren wir:

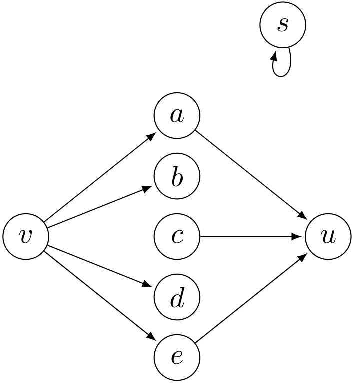
- $g_G^+(v) := \left|\delta_G^+(v)\right|$ — Außengrad von v
- $g_G^-(v) := \left|\delta_G^-(v)\right|$ — Innengrad von v
- $g_G(v) := g_G^+(v) + g_G^-(v)$ — Grad von v
- $\Delta(G) := \max_{v \in V} g_G(v)$ — Maximalgrad von G
- $S(G) := \min_{v \in V} g_G(v)$ — Minimalgrad von G

Gerichtete Graphen – Nachbarn, Grad

Definition 2.3 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Für $v \in V$ definieren wir:

- $g_G^+(v) := \left|\delta_G^+(v)\right|$ — Außengrad von v
- $g_G^-(v) := \left|\delta_G^-(v)\right|$ — Innengrad von v
- $g_G(v) := g_G^+(v) + g_G^-(v)$ — Grad von v
- $\Delta(G) := \max_{v \in V} g_G(v)$ — Maximalgrad von G
- $S(G) := \min_{v \in V} g_G(v)$ — Minimalgrad von G



Beispiele:

- $g^+(v) = 4$, $g^+(s) = 1$ und $g^+(b) = 0$
- $g^-(u) = 3$, $g^-(s) = 1$ und $g^-(c) = 0$
- $g(v) = 4$ und $g(a) = g(s) = 2$
- $\Delta(G) = 4$ und $S(G) = 1$

Gerichtete Graphen – Eigenschaften

Beobachtung

Für jeden gerichteten Graph (V, R, α, ω) gilt $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v)$

Lemma 2.5

Jeder endliche gerichtete Graph (V, R, α, ω) hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Gerichtete Graphen – Eigenschaften

Beobachtung

Für jeden gerichteten Graph (V, R, α, ω) gilt $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v)$

Lemma 2.5

Jeder endliche gerichtete Graph (V, R, α, ω) hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt:

$$2\,|R| = \sum_{v \in V} g(v)$$

$\square$

Gerichtete Graphen – Eigenschaften

Beobachtung

Für jeden gerichteten Graph (V, R, α, ω) gilt $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v)$

Lemma 2.5

Jeder endliche gerichtete Graph (V, R, α, ω) hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt:

$$2\,|R| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v)$$

$\square$

Gerichtete Graphen – Eigenschaften

Beobachtung

Für jeden gerichteten Graph (V, R, α, ω) gilt $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v)$

Lemma 2.5

Jeder endliche gerichtete Graph (V, R, α, ω) hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2\,|R| = \sum_{v \in V} g(v) &= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v) \\ &= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} (g(v) - 1) + |U| \end{aligned}$$

$\square$

Gerichtete Graphen – Eigenschaften

Beobachtung

Für jeden gerichteten Graph (V, R, α, ω) gilt $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v)$

Lemma 2.5

Jeder endliche gerichtete Graph (V, R, α, ω) hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

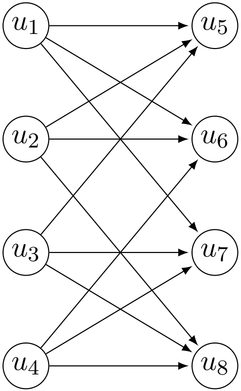
Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt:

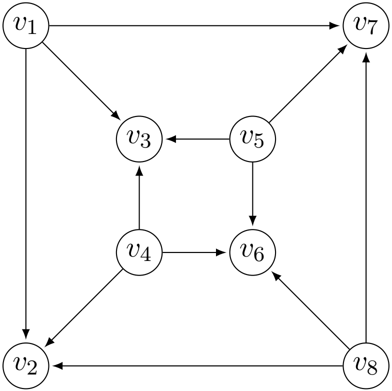
$$\begin{aligned}
\underbrace{2\,|R|}_{\text{gerade}} = \sum_{v \in V} g(v) &= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v) \\
&= \underbrace{\sum_{v \in V \setminus U} g(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v \in U} (g(v) - 1)}_{\text{gerade}} + |U|
\end{aligned}$$

□

Gerichtete Graphen – Isomorphie



G



G'

Gerichtete Graphen – Isomorphie

Definition 2.4

Zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, R_1, \alpha_1, \omega_1)$ und $G_2 = (V_2, R_2, \alpha_2, \omega_2)$ sind *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $\sigma : V_1 \to V_2$ und $\tau : R_1 \to R_2$ gibt, mit

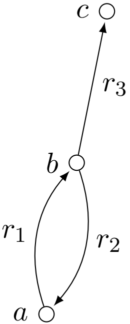
- $\forall r \in R_1 : \alpha_2(\tau(r)) = \sigma(\alpha_1(r))$
- $\forall r \in R_1 : \omega_2(\tau(r)) = \sigma(\omega_1(r))$

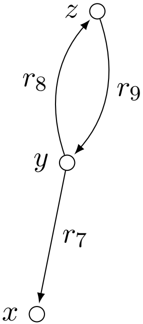
Gerichtete Graphen – Isomorphie

Definition 2.4

Zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, R_1, \alpha_1, \omega_1)$ und $G_2 = (V_2, R_2, \alpha_2, \omega_2)$ sind *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $\sigma : V_1 \to V_2$ und $\tau : R_1 \to R_2$ gibt, mit

- $\forall r \in R_1 : \alpha_2(\tau(r)) = \sigma(\alpha_1(r))$
- $\forall r \in R_1 : \omega_2(\tau(r)) = \sigma(\omega_1(r))$





	σ
a	
b	
c	

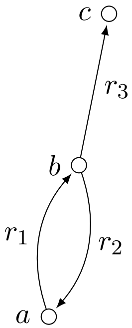
	τ
r_1	
r_2	
r_3	

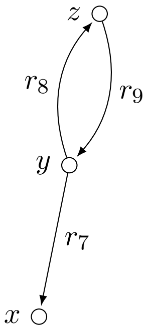
Gerichtete Graphen – Isomorphie

Definition 2.4

Zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, R_1, \alpha_1, \omega_1)$ und $G_2 = (V_2, R_2, \alpha_2, \omega_2)$ sind *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $\sigma : V_1 \to V_2$ und $\tau : R_1 \to R_2$ gibt, mit

- $\forall r \in R_1 : \alpha_2(\tau(r)) = \sigma(\alpha_1(r))$
- $\forall r \in R_1 : \omega_2(\tau(r)) = \sigma(\omega_1(r))$





	σ
a	z
b	y
c	x

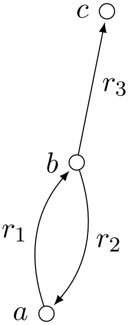
	τ
r_1	
r_2	
r_3	

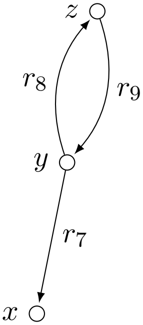
Gerichtete Graphen – Isomorphie

Definition 2.4

Zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, R_1, \alpha_1, \omega_1)$ und $G_2 = (V_2, R_2, \alpha_2, \omega_2)$ sind *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen $\sigma : V_1 \to V_2$ und $\tau : R_1 \to R_2$ gibt, mit

- $\forall r \in R_1 : \alpha_2(\tau(r)) = \sigma(\alpha_1(r))$
- $\forall r \in R_1 : \omega_2(\tau(r)) = \sigma(\omega_1(r))$





	σ
a	z
b	y
c	x

	τ
r_1	r_9
r_2	r_8
r_3	r_7

Gerichtete Graphen – Teilgraph

Definition 2.6

Ein Graph $G' = (V', R', \alpha', \omega')$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, R, \alpha, \omega)$ (man schreibt $G' \sqsubseteq G$) wenn

- $V' \subseteq V$,
- $R' \subseteq R$ und
- $\forall r \in R' : \alpha'(r) = \alpha(r) \wedge \omega'(r) = \omega(r)$.

G heißt *Obergraph* von G'. Falls zusätzlich $V' \subset V$ oder $R' \subset R$, dann ist G' ein *echter* Teilgraph von G und G ein *echter* Obergraph von G'.

Gerichtete Graphen – Teilgraph

Definition 2.6

Ein Graph $G' = (V', R', \alpha', \omega')$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, R, \alpha, \omega)$ (man schreibt $G' \sqsubseteq G$) wenn

- $V' \subseteq V$,
- $R' \subseteq R$ und
- $\forall r \in R' : \alpha'(r) = \alpha(r) \wedge \omega'(r) = \omega(r)$.

G heißt *Obergraph* von G'. Falls zusätzlich $V' \subset V$ oder $R' \subset R$, dann ist G' ein *echter* Teilgraph von G und G ein *echter* Obergraph von G'.

Beobachtung 1

$\sqsubseteq$ ist eine partielle Ordnung, denn:

- Reflexivität: $G \sqsubseteq G$ (Jeder Graph ist ein Teilgraph von sich selbst)
- Antisymmetrie: wenn $G' \sqsubseteq G$ und $G' \sqsupseteq G$, dann $G' = G$
- Transitivität: wenn $G'' \sqsubseteq G'$ und $G' \sqsubseteq G$, dann $G'' \sqsubseteq G$

Gerichtete Graphen – Subgraph, Partialgraph

Definition 2.7

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein ger. Graph und $G' = (V', R', \alpha', \omega') \sqsubseteq G$ ein Teilgraph.

- G' heißt *Subgraph* wenn $V' \subseteq V$ und $R' = \{r \in R \mid \alpha(r) \in V' \ \wedge \ \omega(r) \in V'\}$
- G' heißt *Partialgraph* wenn $V' = V$ und $R' \subseteq R$

Für $V' \subseteq V$ bezeichnet $G[V']$ den *induzierten Subgraph* mit $V(G[V']) = V'$.
Für $R' \subseteq R$ bezeichnet $G_{R'}$ den *induzierten Partialgraph* mit $R(G_{R'}) = R'$

Graph G Teilgraph Subgraph Partialgraph

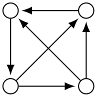
Gerichtete Graphen – Subgraph, Partialgraph

Definition 2.7

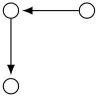
Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein ger. Graph und $G' = (V', R', \alpha', \omega') \sqsubseteq G$ ein Teilgraph.

- G' heißt *Subgraph* wenn $V' \subseteq V$ und $R' = \{r \in R \mid \alpha(r) \in V' \ \wedge \ \omega(r) \in V'\}$
- G' heißt *Partialgraph* wenn $V' = V$ und $R' \subseteq R$

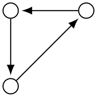
Für $V' \subseteq V$ bezeichnet $G[V']$ den *induzierten Subgraph* mit $V(G[V']) = V'$.
Für $R' \subseteq R$ bezeichnet $G_{R'}$ den *induzierten Partialgraph* mit $R(G_{R'}) = R'$



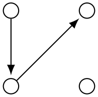
Graph G



Teilgraph



Subgraph



Partialgraph

Kurzschreibweisen (praktisch für Beweise per Induktion):

- $G - v := G[V(G) \setminus \{v\}]$
- $G - r := G_{R(G) \setminus \{r\}}$