Graphentheorie
02 – Ungerichtete Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Ungerichtete Graphen

Definition 2.8

Ein *ungerichteter Graph* ist ein Tripel $G = (V, E, \gamma)$ mit

- V = Ecken/Knotenmenge
- E = Kantenmenge
- $V \cap E = \emptyset$
- $\gamma : E \to \{X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2\}$

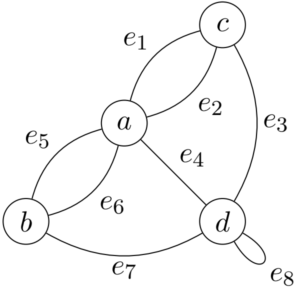
Die Abbildung γ ordnet jeder Kante ihre Endknoten zu.

Der Graph G ist *endlich* wenn V und E endlich sind.

$V(G)$ bezeichnet Ecken/Knotenmenge von G
$E(G)$ bezeichnet Kantenmenge von G

Konvention: $n = |V|$ und $m = |E|$.

Ungerichtete Graphen – Beispiel

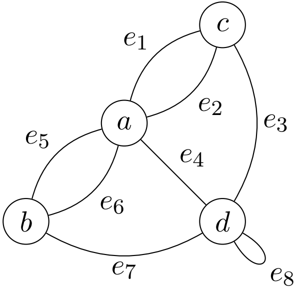


$$V = \{ \qquad \}$$

$$E = \{ \qquad \}$$

	γ
e_1	$\{ \quad \}$
e_2	$\{ \quad \}$
e_3	$\{ \quad \}$
e_4	$\{ \quad \}$
e_5	$\{ \quad \}$
e_6	$\{ \quad \}$
e_7	$\{ \quad \}$
e_8	$\{ \quad \}$

Ungerichtete Graphen – Beispiel

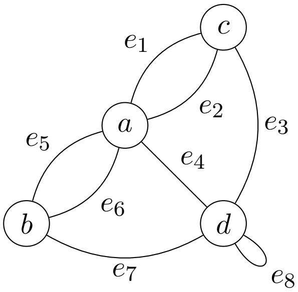


$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

	γ
e_1	$\{ \quad \}$
e_2	$\{ \quad \}$
e_3	$\{ \quad \}$
e_4	$\{ \quad \}$
e_5	$\{ \quad \}$
e_6	$\{ \quad \}$
e_7	$\{ \quad \}$
e_8	$\{ \quad \}$

Ungerichtete Graphen – Beispiel

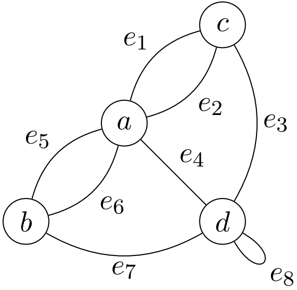


$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$$

	γ
e_1	$\{\quad\}$
e_2	$\{\quad\}$
e_3	$\{\quad\}$
e_4	$\{\quad\}$
e_5	$\{\quad\}$
e_6	$\{\quad\}$
e_7	$\{\quad\}$
e_8	$\{\quad\}$

Ungerichtete Graphen – Beispiel

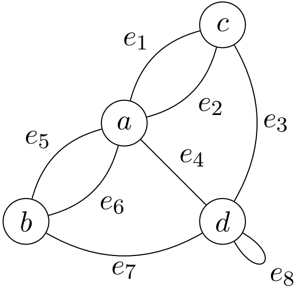


$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$$

	γ
e_1	$\{a, c\}$
e_2	$\{a, c\}$
e_3	$\{c, d\}$
e_4	$\{a, d\}$
e_5	$\{a, b\}$
e_6	$\{a, b\}$
e_7	$\{b, d\}$
e_8	$\{d, d\}$

Ungerichtete Graphen – Beispiel



$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$$

	γ
e_1	$\{a, c\}$
e_2	$\{a, c\}$
e_3	$\{c, d\}$
e_4	$\{a, d\}$
e_5	$\{a, b\}$
e_6	$\{a, b\}$
e_7	$\{b, d\}$
e_8	$\{d, d\} = \{d\}$

Schlingen, Parallelen

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph und $e, e' \in E$.

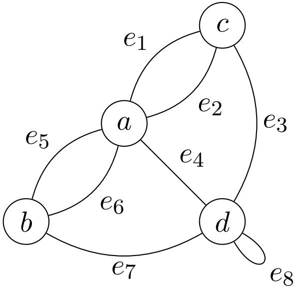
- Kante $e \in E$ heißt *Schlinge* wenn $|\gamma(e)| = 1$.
- Graph G heißt *schlingenfrei* wenn $\forall e \in E : |\gamma(e)| = 2$.
- Kanten e, e' heißen *parallel* wenn $e \neq e'$ und $\gamma(e) = \gamma(e')$.

Schlingen, Parallelen

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph und $e, e' \in E$.

- Kante $e \in E$ heißt *Schlinge* wenn $|\gamma(e)| = 1$.
- Graph G heißt *schlingenfrei* wenn $\forall e \in E : |\gamma(e)| = 2$.
- Kanten e, e' heißen *parallel* wenn $e \neq e'$ und $\gamma(e) = \gamma(e')$.



$$\begin{aligned} \gamma(e_1) &= \{a, c\} \\ \gamma(e_2) &= \{a, c\} \\ \gamma(e_8) &= \{d\} \end{aligned}$$

Adjazenz, Inzidenz

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $e, e' \in E$.

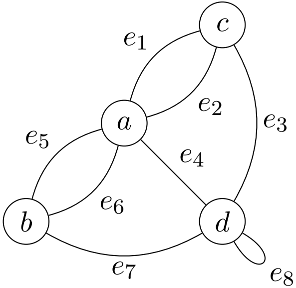
- Knoten v und Kante e heißen *inzident* wenn $v \in \gamma(e)$
- Kanten e, e' heißen *inzident* wenn $\gamma(e) \cap \gamma(e') \neq \emptyset$
- Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart* wenn $\exists e \in E : \gamma(e) = \{v, u\}$

Adjazenz, Inzidenz

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph und $v, u \in V$ sowie $e, e' \in E$.

- Knoten v und Kante e heißen *inzident* wenn $v \in \gamma(e)$
- Kanten e, e' heißen *inzident* wenn $\gamma(e) \cap \gamma(e') \neq \emptyset$
- Knoten v, u heißen *adjazent* oder *benachbart* wenn $\exists e \in E : \gamma(e) = \{v, u\}$



$$\begin{aligned} \gamma(e_1) &= \{a, c\} \\ \gamma(e_5) &= \{a, b\} \\ \gamma(e_8) &= \{d\} \end{aligned}$$

Nachbarn, Grad

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph.

- Menge der zu v inzidenten Kanten:
  $$\delta_G(v) := \{e \in E \mid v \in \gamma(e)\}$$
- Menge der Nachbarn bzw. der zu v adjazenten Knoten:
  $$N_G(v) := \{u \in V \mid \exists e \in E : \gamma(e) = \{u, v\}\}$$

Nachbarn, Grad

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph.

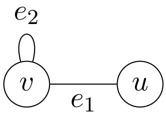
- Menge der zu v inzidenten Kanten:
  $$\delta_G(v) := \{e \in E \mid v \in \gamma(e)\}$$
- Menge der Nachbarn bzw. der zu v adjazenten Knoten:
  $$N_G(v) := \{u \in V \mid \exists e \in E : \gamma(e) = \{u, v\}\}$$
- Grad von v: $\displaystyle g_G(v) := \sum_{e \in \delta_G(v)} 3 - |\gamma(e)|$
- Maximalgrad von G: $\displaystyle \Delta(G) := \max_{v \in V} g_G(v)$
- Minimalgrad von G: $\displaystyle S(G) := \min_{v \in V} g_G(v)$
- G heißt Δ-regulär wenn $g_G(v) = \Delta$ für alle $v \in V$

Nachbarn, Grad

Definition 2.8 (Fortsetzung)

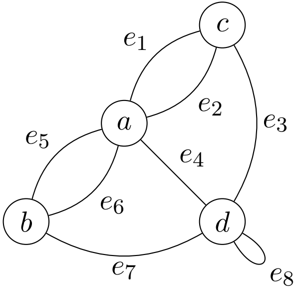
Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph.

- Menge der zu v inzidenten Kanten:
  $$\delta_G(v) := \{e \in E \mid v \in \gamma(e)\}$$
- Menge der Nachbarn bzw. der zu v adjazenten Knoten:
  $$N_G(v) := \{u \in V \mid \exists e \in E : \gamma(e) = \{u, v\}\}$$
- Grad von v: $\quad g_G(v) := \sum_{e \in \delta_G(v)} 3 - |\gamma(e)|$
- Maximalgrad von G: $\quad \Delta(G) := \max_{v \in V} g_G(v)$
- Minimalgrad von G: $\quad S(G) := \min_{v \in V} g_G(v)$
- G heißt Δ-regulär wenn $g_G(v) = \Delta$ für alle $v \in V$



$$g(v) = 1 + 2$$
$$= 3$$

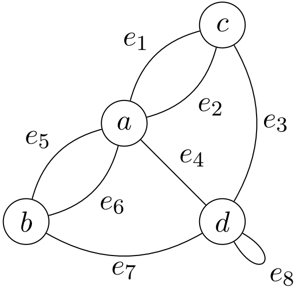
Beispiele



$$\delta(a) = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$$
$$\delta(d) = \{e_3, e_4, e_7, e_8\}$$

$$N(a) = \{b, c, d\}$$
$$N(d) = \{a, b, c, d\}$$

Beispiele



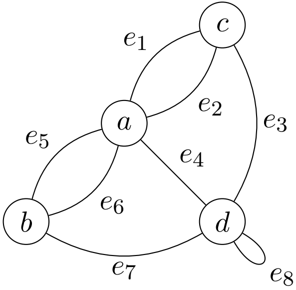
$$\delta(a) = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$$
$$\delta(d) = \{e_3, e_4, e_7, e_8\}$$

$$N(a) = \{b, c, d\}$$
$$N(d) = \{a, b, c, d\}$$

$$g(a) = 5$$
$$g(d) = 5$$

$$\Delta(G) = 5$$
$$S(G) = 3$$

Beispiele

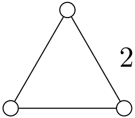


$$\delta(a) = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$$
$$\delta(d) = \{e_3, e_4, e_7, e_8\}$$

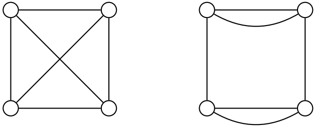
$$N(a) = \{b, c, d\}$$
$$N(d) = \{a, b, c, d\}$$

$$g(a) = 5$$
$$g(d) = 5$$

$$\Delta(G) = 5$$
$$S(G) = 3$$



2-regulär



3-regulär

Einfache Ungerichtete Graphen

Definition 2.8 (Fortsetzung)

Ein ungerichteter Graph heißt *einfach* wenn er keine Schlingen oder Parallelen enthält.

Notation für ungerichtete Graphen ohne Parallelen:

- $G = (V, E)$
- V = Knotenmenge
- E = Menge von Elementen der Form $[v, u]$
- $[v, u]$ beschreibt Kante zwischen Knoten v und u

Wir schreiben statt $[v, u]$ auch $\{v, u\}$.

Schlingen schreiben wir $[v, v]$ oder $\{v\}$.

Teilgraphen

Die Definitionen von *Obergraph*, *Teilgraph*, *Subgraph*, und *Partialgraph* sind analog zu gerichteten Graphen.

Obergraph Teilgraph Subgraph Partialgraph

Ungerichtete Graphen – Eigenschaften

Lemma 2.9

Jeder endliche ungerichtete Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} g(v)$$

$\square$

Ungerichtete Graphen – Eigenschaften

Lemma 2.9

Jeder endliche ungerichtete Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\,|E| &= \sum_{v \in V} g(v) \\ &= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v) \end{aligned}$$

$\square$

Ungerichtete Graphen – Eigenschaften

Lemma 2.9

Jeder endliche ungerichtete Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt

$$\begin{aligned}
2\,|E| &= \sum_{v \in V} g(v) \\
&= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v) \\
&= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} (g(v) - 1) + |U|
\end{aligned}$$

$\square$

Ungerichtete Graphen – Eigenschaften

Lemma 2.9

Jeder endliche ungerichtete Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{2\,|E|}_{\text{gerade}} &= \sum_{v \in V} g(v) \\
&= \sum_{v \in V \setminus U} g(v) + \sum_{v \in U} g(v) \\
&= \underbrace{\sum_{v \in V \setminus U} g(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v \in U} (g(v) - 1)}_{\text{gerade}} + |U|
\end{aligned}$$

□

Ungerichtete Graphen – Eigenschaften

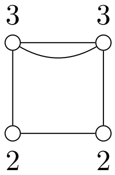
Lemma 2.9

Jeder endliche ungerichtete Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis.

Sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Dann gilt

$$\begin{aligned}\underbrace{2\,|E|}_{\text{gerade}} &= \sum_{v\in V} g(v)\\ &= \sum_{v\in V\setminus U} g(v) + \sum_{v\in U} g(v)\\ &= \underbrace{\sum_{v\in V\setminus U} g(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v\in U} (g(v)-1) + |U|}_{\text{gerade}}\end{aligned}$$



$\square$

Ungerichtete Graphen – Isomorphie

Definition

Zwei ungerichtete Graphen $G = (V, E, \gamma)$ und $G' = (V', E', \gamma')$ sind *isomorph*, wenn es zwei bijektive Abbildungen $\sigma : V \to V'$ und $\tau : E \to E'$ gibt, mit

- $\forall e \in E : \gamma'(\tau(e)) = \sigma(\gamma(e))$.

Hinweis: $\sigma(\{v, u\}) = \{\sigma(v), \sigma(u)\}$.

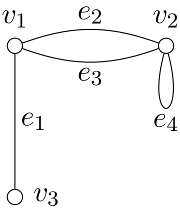
Ungerichtete Graphen – Isomorphie

Definition

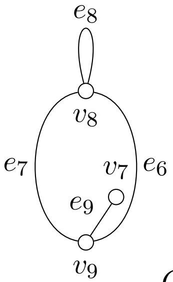
Zwei ungerichtete Graphen $G = (V, E, \gamma)$ und $G' = (V', E', \gamma')$ sind *isomorph*, wenn es zwei bijektive Abbildungen $\sigma : V \to V'$ und $\tau : E \to E'$ gibt, mit

- $\forall e \in E : \gamma'(\tau(e)) = \sigma(\gamma(e))$.

Hinweis: $\sigma(\{v, u\}) = \{\sigma(v), \sigma(u)\}$.



G



G'

	$\sigma(v_i)$
v_1	
v_2	
v_3	

	$\tau(e_i)$
e_1	
e_2	
e_3	
e_4	

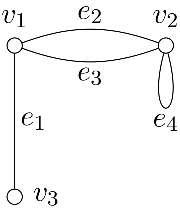
Ungerichtete Graphen – Isomorphie

Definition

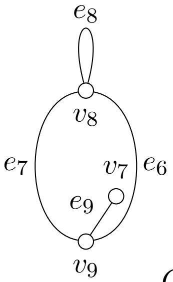
Zwei ungerichtete Graphen $G = (V, E, \gamma)$ und $G' = (V', E', \gamma')$ sind *isomorph*, wenn es zwei bijektive Abbildungen $\sigma : V \to V'$ und $\tau : E \to E'$ gibt, mit

- $\forall e \in E : \gamma'(\tau(e)) = \sigma(\gamma(e))$.

Hinweis: $\sigma(\{v, u\}) = \{\sigma(v), \sigma(u)\}$.



G



G'

	$\sigma(v_i)$
v_1	v_9
v_2	v_8
v_3	v_7

	$\tau(e_i)$
e_1	
e_2	
e_3	
e_4	

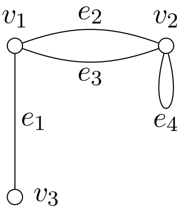
Ungerichtete Graphen – Isomorphie

Definition

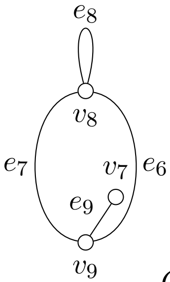
Zwei ungerichtete Graphen $G = (V, E, \gamma)$ und $G' = (V', E', \gamma')$ sind *isomorph*, wenn es zwei bijektive Abbildungen $\sigma : V \to V'$ und $\tau : E \to E'$ gibt, mit

- $\forall e \in E : \gamma'(\tau(e)) = \sigma(\gamma(e))$.

Hinweis: $\sigma(\{v, u\}) = \{\sigma(v), \sigma(u)\}$.



G



G'

	$\sigma(v_i)$
v_1	v_9
v_2	v_8
v_3	v_7

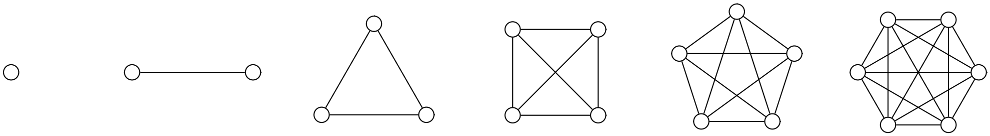
	$\tau(e_i)$
e_1	e_9
e_2	e_6
e_3	e_7
e_4	e_8

Vollständige Graphen

Definition

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ mit $E = \{[v, u] \mid v, u \in V \wedge v \neq u\}$ heisst *vollständiger Graph* oder *Clique*.

Kurzschreibweise:
K_n bezeichnet den vollständigen Graphen mit $|V| = n$.



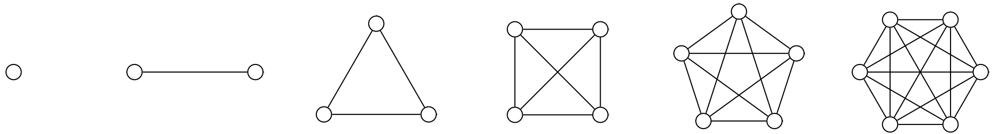
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Vollständige Graphen

Definition

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ mit $E = \{[v, u] \mid v, u \in V \wedge v \neq u\}$ heisst *vollständiger Graph* oder *Clique*.

Kurzschreibweise:
K_n bezeichnet den vollständigen Graphen mit $|V| = n$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

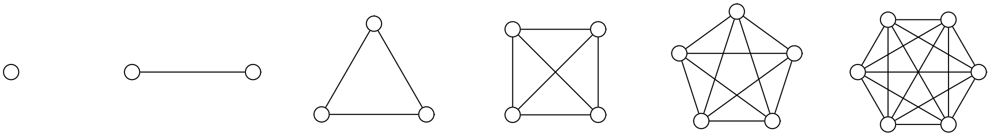
Wie viele Kanten hat K_n?

Vollständige Graphen

Definition

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ mit $E = \{[v, u] \mid v, u \in V \wedge v \neq u\}$ heisst *vollständiger Graph* oder *Clique*.

Kurzschreibweise:
K_n bezeichnet den vollständigen Graphen mit $|V| = n$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Wie viele Kanten hat K_n?

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$