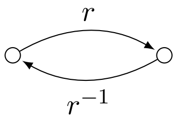
Graphentheorie
03 – Inverse und Zugeordnete Graphen, Line-Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Inverse Graphen, Symmetrische Hülle

Definition 2.10

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph.
Zu jeder Kante $r \in R$ definieren wir die *inverse Kante* r^{-1} mit



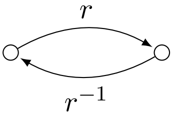
- $\alpha(r^{-1}) = \omega(r)$
- $\omega(r^{-1}) = \alpha(r)$

$G^{-1} = (V, R^{-1}, \alpha, \omega)$ mit $R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$ ist der *inverse Graph* von G.

Inverse Graphen, Symmetrische Hülle

Definition 2.10

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph.
Zu jeder Kante $r \in R$ definieren wir die *inverse Kante* r^{-1} mit



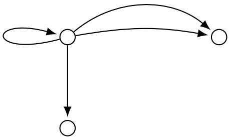
- $\alpha(r^{-1}) = \omega(r)$
- $\omega(r^{-1}) = \alpha(r)$

$G^{-1} = (V, R^{-1}, \alpha, \omega)$ mit $R^{-1} = \{r^{-1} \mid r \in R\}$ ist der *inverse Graph* von G.

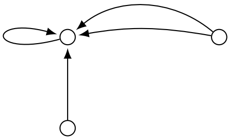
$G^{\text{sym}} = (V, R \cup R^{-1}, \alpha, \omega)$ ist die *symmetrische Hülle* von G.

Man erhält die *einfache symmetrische Hülle* durch entfernen aller Schlingen und Parallelen aus G^{sym} (von parallelen Kanten verbleibt genau eine).

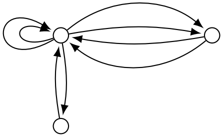
Inverse Graphen, Symmetrische Hülle – Beispiel



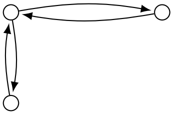
G



G^{-1}



G^{sym}



einfache symm. Hülle

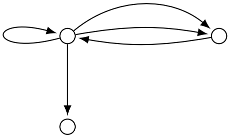
Zugeordneter Graph

Definition 2.11

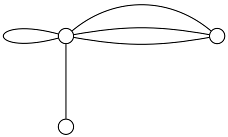
Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph.
Der ungerichtete Graph $H = (V, E, \gamma)$ mit

- $E = R$ und
- $\gamma(e) = \{\alpha(e), \omega(e)\}$ für alle $e \in E$

heißt der zu G *zugeordnete Graph*.



G



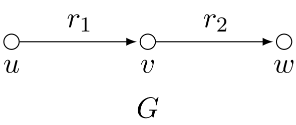
zu G zugeordeneter Graph

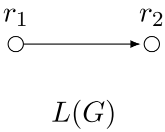
Line-Graph

Definition 2.12

Sei $G = (V, R)$ ein einfacher gerichteter Graph.
Der *Line-Graph* $L(G) = (V_L, R_L)$ ist definiert durch

- $V_L := R$ und
- $R_L := \{(r, r') \in R \times R \mid \exists u, v, w \in V : r = (u, v) \wedge r' = (v, w)\}$.



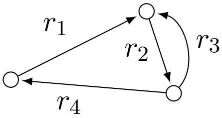


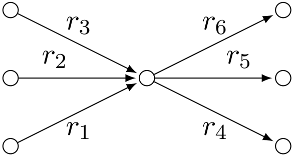
Line-Graph – Beispiele

Beobachtung

Für alle $r \in R$ gilt $g^+_{L(G)}(r) = g^+_G(\omega(r))$ und $g^-_{L(G)}(r) = g^-_G(\alpha(r))$.

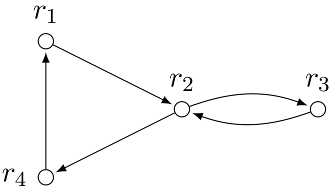
G

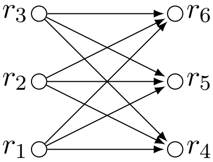




G'

$L(G)$





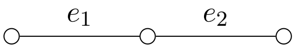
$L(G')$

Ungerichteter Line-Graph

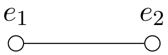
Definition 2.12 (Fortsetzung)

Sei $H = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph.
Der *Line-Graph* $L(H) = (V_L, E_L)$ ist definiert durch

- $V_L = E$ und
- $E_L = \{[e, e'] \mid e$ und e' sind verschieden und inzident$\}$.
  $= \{[e, e'] \mid e \neq e' \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}$



H



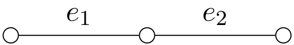
$L(H)$

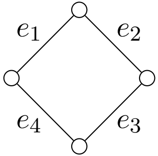
Ungerichteter Line-Graph – Beispiele

Beobachtung

Es gilt $g_{L(H)}([v,u]) = g_H(v) + g_H(u) - 2$ für alle $[v,u] \in E$.

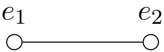
H

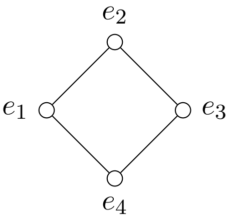




H'

$L(H)$





$L(H')$

Ungerichteter Line-Graph – Eigenschaften

Beobachtung

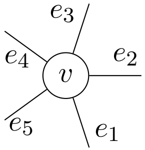
Für jeden Knoten $v \in V$ enthält E_L genau

$$\binom{g(v)}{2} = \frac{g(v)(g(v)-1)}{2}$$

Kanten. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
|E_L| = \sum_{v\in V} \binom{g(v)}{2} &= \sum_{v\in V} \frac{1}{2} g(v)(g(v)-1) \\
&= \sum_{v\in V} \frac{1}{2} g^2(v) - \frac{1}{2} g(v) \\
&= \left(\frac{1}{2} \sum_{v\in V} g^2(v)\right) - |E|
\end{aligned}$$

Ungerichteter Line-Graph – Eigenschaften



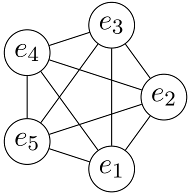
Beobachtung

Für jeden Knoten $v \in V$ enthält E_L genau

$$\binom{g(v)}{2} = \frac{g(v)(g(v)-1)}{2}$$

Kanten. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |E_L| = \sum_{v \in V} \binom{g(v)}{2} &= \sum_{v \in V} \frac{1}{2} g(v)(g(v)-1) \\ &= \sum_{v \in V} \frac{1}{2} g^2(v) - \frac{1}{2} g(v) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{v \in V} g^2(v) \right) - |E| \end{aligned}$$



Ungerichteter Line-Graph – Eigenschaften

Beobachtung

Unterschiedliche Graphen können gleiche Line-Graphen haben.