Graphentheorie
04 – Speicherung

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Speicherung von Graphen

Drei Alternativen:

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Inzidenzmatrix

Jede Art Graphen zu speichern

- hat Vor- und Nachteile
- beeinflusst Laufzeit von Algorithmen

Speicherung von Graphen

Drei Alternativen:

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Inzidenzmatrix

Jede Art Graphen zu speichern

- hat Vor- und Nachteile
- beeinflusst Laufzeit von Algorithmen

Konvention im Folgenden:

- $G = (V, R, \alpha, \omega)$ und $H = (V, E, \gamma)$ mit
- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und
- $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ bzw. $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

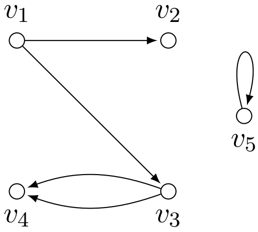
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \wedge \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ A(G) = \begin{pmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{array}$$

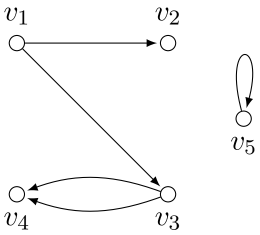
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \wedge \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$A(G) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{array}$$

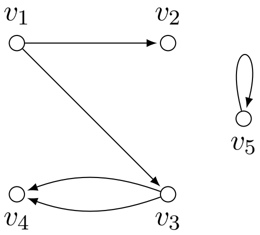
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \wedge \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

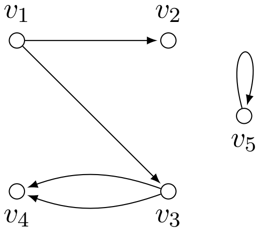
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \wedge \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$A(G) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

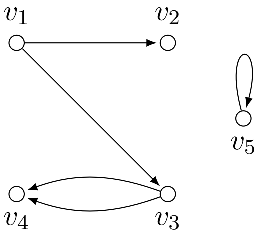
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \wedge \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

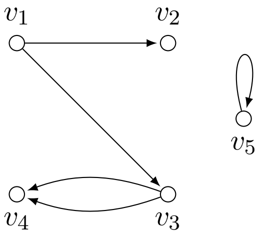
Adjazenzmatrix – gerichtet

Definition 2.13

Die Adjazenzmatrix $A(G)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{r \in R \mid \alpha(r) = v_i \land \omega(r) = v_j\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



G

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
A(G) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\end{array}$$

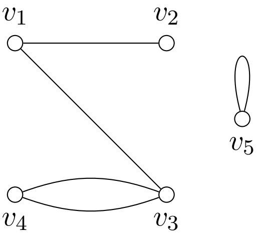
Adjazenzmatrix – ungerichtet

Definition 2.13 (Fortsetzung)

Die Adjazenzmatrix $A(H)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{e \in E \mid \gamma(e) = \{v_i, v_j\}\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



H

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
A(H) = & \left(\begin{array}{ccccc} \; & \; & \; & \; & \; \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\end{array}$$

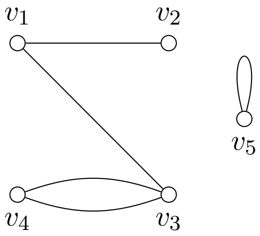
Adjazenzmatrix – ungerichtet

Definition 2.13 (Fortsetzung)

Die Adjazenzmatrix $A(H)$ ist die $n \times n$-Matrix mit

$$a_{i,j} := |\{e \in E \mid \gamma(e) = \{v_i, v_j\}\}|$$

Hinweis: i = Zeile, j = Spalte



H

$$A(H) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

Adjazenzmatrix – Eigenschaften

Beobachtung

Die Adjazenzmatrix von ungerichteten Graphen
ist spiegelsymmetrisch bzgl. der Hauptdiagonalen (siehe $A(H)$).

Beobachtung

Für Graphen ohne Parallelen belegt eine Adjazenzmatrix $\Theta(n^2)$ Bits.

Vorteil: schneller Test ob Knoten v_i Nachbar von v_j ist!

Adjazenzmatrix – Kantengewichte

Definition

Sei ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ ohne Parallelen
und eine Funktion $c : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben.
Funktion c ordnet jeder Kante in G ein Gewicht zu.
Dann sprechen wir von einem *gewichteten Graphen*.

Setze $a_{i,j} = \begin{cases} c(v_i, v_j) & \text{falls } (v_i, v_j) \in R \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel: $A(G) = \begin{pmatrix} \perp & 3 & 4 \\ \perp & \perp & 2 \\ \perp & 1 & \perp \end{pmatrix}$

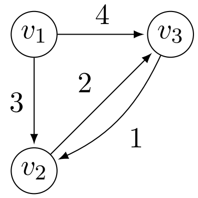
Adjazenzmatrix – Kantengewichte

Definition

Sei ein gerichteter Graph $G = (V, R)$ ohne Parallelen
und eine Funktion $c : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben.
Funktion c ordnet jeder Kante in G ein Gewicht zu.
Dann sprechen wir von einem *gewichteten Graphen*.

Setze $a_{i,j} = \begin{cases} c(v_i, v_j) & \text{falls } (v_i, v_j) \in R \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel: $A(G) = \begin{pmatrix} \perp & 3 & 4 \\ \perp & \perp & 2 \\ \perp & 1 & \perp \end{pmatrix}$

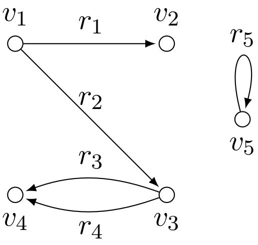


Inzidenzmatrix – gerichtet

Definition 2.14

Sei G ein gerichteter Graph ohne Schlingen.
Die *Inzidenzmatrix* $I(G)$ ist die $n \times m$-Matrix (n Zeilen, m Spalten) mit

$$i_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_k = \alpha(r_\ell) \\ -1 & \text{falls } v_k = \omega(r_\ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



G

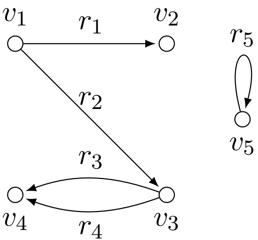
$$I(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Inzidenzmatrix – gerichtet

Definition 2.14

Sei G ein gerichteter Graph ohne Schlingen.
Die *Inzidenzmatrix* $I(G)$ ist die $n \times m$-Matrix (n Zeilen, m Spalten) mit

$$i_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_k = \alpha(r_\ell) \\ -1 & \text{falls } v_k = \omega(r_\ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



G

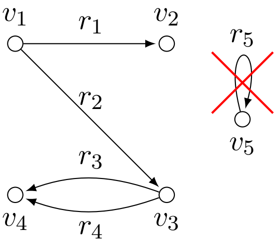
$$I(G) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{array}\right) \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

Inzidenzmatrix – gerichtet

Definition 2.14

Sei G ein gerichteter Graph ohne Schlingen.
Die *Inzidenzmatrix* $I(G)$ ist die $n \times m$-Matrix (n Zeilen, m Spalten) mit

$$i_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_k = \alpha(r_\ell) \\ -1 & \text{falls } v_k = \omega(r_\ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



G

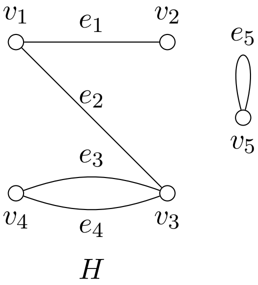
$$I(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Inzidenzmatrix – ungerichtet

Definition 2.14 (Fortsetzung)

Die Inzidenzmatrix $I(H)$ ist die $n \times m$-Matrix mit

$$i_{k,\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_k \in \gamma(e_\ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$I(H) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

Inzidenzmatrix – Eigenschaften

Beobachtung

Eine Inzidenzmatrix enthält pro Spalte

- 1 von Null verschiedenen Eintrag für eine Schlinge
- 2 von Null verschiedene Einträge sonst

Beobachtung

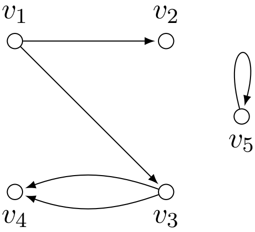
Eine Inzidenzmatrix belegt $\Theta(nm)$ Bits.

Adjazenzlisten – gerichtet

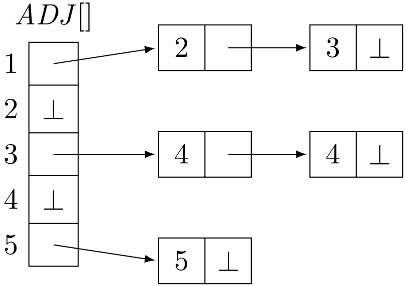
Definition

Adjazenzlisten-Repräsentation von G:

- Array ADJ der Länge n
- $ADJ[i]$ ist einfach verkette Liste aller Knoten $u \in N_G^+(v_i)$
- Mehrere Einträge bei Parallelen



G

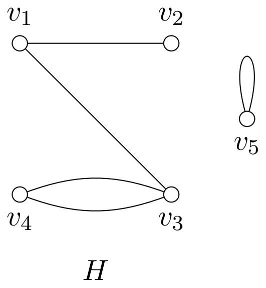


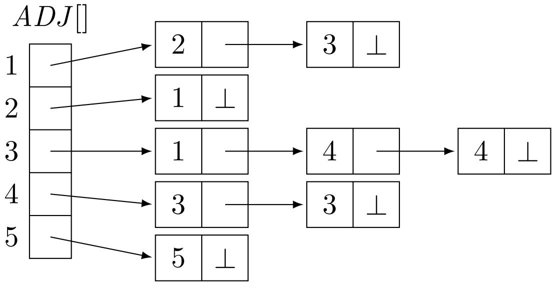
Adjazenzlisten – ungerichtet

Definition

Adjazenzlisten-Repräsentation von H:

- Array ADJ der Länge n
- $ADJ[i]$ ist einfach verkettete Liste aller Knoten $u \in N_H(v_i)$
- Mehrere Einträge bei Parallelen





Adjazenzlisten – Eigenschaften

Beobachtung

Die Adjazenzlisten-Repräsentation belegt $\Theta(n + m)$ Bits.

Lohnt sich, wenn $m \ll n^2$.
Weiterer Vorteil: Menge der Nachfolger/Nachbarn

Turingmaschinenbandkodierung

Zur Erinnerung:

- TM hat Speicherband unendlicher Länge
- Band speichert Symbole aus Alphabet Σ

Turingmaschinenbandkodierung

Zur Erinnerung:

- TM hat Speicherband unendlicher Länge
- Band speichert Symbole aus Alphabet Σ

Beispiel:

- ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- $V = \{0, 1, 2, 3\}$
- $E = \{[0, 1], [2, 3]\}$
- $\Sigma = \left\{ \{\}()[],01 \right\}$

(	{	0	,	1	,	1	0	,	1	1	}	,	{	[	0	,	1	]	,	[	1	0	,	1	1	]	}	)