Graphentheorie
05 – Wege, Kreise, Kreisfreie Graphen

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Wege

Definition 3.1

Ein *Weg/Pfad* in einem Graph G ist eine endlich Folge
$P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, \ldots, r_k, v_k)$ mit $k \geq 0$ und

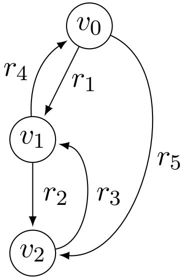
- $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$
- $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R(G)$
- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \alpha(r_i) = v_{i-1} \land \omega(r_i) = v_i$

Wege

Definition 3.1

Ein *Weg/Pfad* in einem Graph G ist eine endlich Folge $P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, \ldots, r_k, v_k)$ mit $k \geq 0$ und

- $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$
- $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R(G)$
- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \alpha(r_i) = v_{i-1} \wedge \omega(r_i) = v_i$



$$P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, r_3, v_1, r_4, v_0, r_5, v_2)$$

Wege

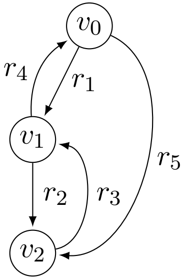
Definition 3.1

Ein *Weg/Pfad* in einem Graph G ist eine endlich Folge
$P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, \ldots, r_k, v_k)$ mit $k \geq 0$ und

- $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$
- $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R(G)$
- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \alpha(r_i) = v_{i-1} \wedge \omega(r_i) = v_i$

bzw. eine endliche Folge
$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ mit $k \geq 0$ und

- $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(G)$
- $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E(G)$
- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \gamma(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$



$$P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, r_3, v_1, r_4, v_0, r_5, v_2)$$

Wege – ungerichtet

Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ bzw. $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$

Definition 3.1 (Forsetzung)

- *Startknoten* $\alpha(P) = v_0$
- *Endknoten* $\omega(P) = v_k$
- *Länge* $|P| = k$ ist die Anzahl der Kanten in P
- *Spur* $s(P) = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$

P heißt *Kreis* wenn $\alpha(P) = \omega(P)$ und $|P| \geq 1$.

Wir sagen:

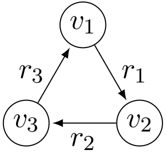
- P *verbindet* v_0 mit v_k
- P *berührt* v_i mit $0 \leq i \leq k$.

Einfache und Elementare Wege

Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ bzw. $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$

Definition 3.1 (Fortsetzung)

Weg P heißt *einfach* wenn $r_i \neq r_j$ bzw. $e_i \neq e_j$ für alle $i \neq j$.
Weg P heißt *elementar* wenn er einfach ist und keinen Knoten mehrmals berührt (Ausnahme: $\alpha(P) = \omega(P)$).



$P = (v_1, r_1, v_2, r_2, v_3, r_3, v_1)$

Beobachtung

Für jeden elementaren Weg P gilt $|P| \leq |V(G)|$.
Falls P kein Kreis ist, dann gilt sogar $|P| \leq |V(G)| - 1$.

Wege – Komposition

Definition

Seien P und P' zwei Wege mit

- $P = (v_0, r_1, v_1, \dots, r_k, v_k)$
- $P' = (v'_0, r'_1, v'_1, \dots, r'_{k'}, v'_{k'})$
- $\omega(P) = \alpha(P')$

Dann bezeichnet $P \circ P'$ die *Komposition* von P und P'.

$$P \circ P' := (v_0, r_1, \dots, r_k, v_k = v'_0, r'_1, \dots, r'_{k'}, v'_{k'})$$

Wege – Komposition

Definition

Seien P und P' zwei Wege mit

- $P = (v_0, r_1, v_1, \dots, r_k, v_k)$
- $P' = (v'_0, r'_1, v'_1, \dots, r'_{k'}, v'_{k'})$
- $\omega(P) = \alpha(P')$

Dann bezeichnet $P \circ P'$ die *Komposition* von P und P'.

$$P \circ P' := (v_0, r_1, \dots, r_k, v_k = v'_0, r'_1, \dots, r'_{k'}, v'_{k'})$$

$$\underbrace{v_0 \overset{P}{\rightsquigarrow} v_k = v'_0 \overset{P'}{\rightsquigarrow} v'_{k'}}_{P \circ P'}$$

Existenz von Kreisen

Lemma 3.3

Sei G ein gerichteter endlicher Graph mit $g^+(v) \geq 1$ für alle $v \in V(G)$.
Dann existiert ein elementarer Kreis.

Falls G einfach ist und $\exists g \geq 1 \forall v \in V(G) : g^+(v) \geq g$,
dann existiert ein elementarer Kreis der Länge $\geq g + 1$.

Existenz von Kreisen

Lemma 3.3

Sei G ein gerichteter endlicher Graph mit $g^+(v) \geq 1$ für alle $v \in V(G)$.
Dann existiert ein elementarer Kreis.

Falls G einfach ist und $\exists g \geq 1 \forall v \in V(G) : g^+(v) \geq g$,
dann existiert ein elementarer Kreis der Länge $\geq g + 1$.

Erste Aussage ist Folgerung von zweiter:

- Entferne Schlingen und Parallelen um den Graphen einfach zu machen.
- Wende zweite Aussage an, erste Aussage folgt.

Existenz von Kreisen

Lemma 3.3

Sei G ein gerichteter endlicher Graph mit $g^+(v) \geq 1$ für alle $v \in V(G)$.
Dann existiert ein elementarer Kreis.

Falls G einfach ist und $\exists g \geq 1 \forall v \in V(G) : g^+(v) \geq g$,
dann existiert ein elementarer Kreis der Länge $\geq g + 1$.

Erste Aussage ist Folgerung von zweiter:

- Entferne Schlingen und Parallelen um den Graphen einfach zu machen.
- Wende zweite Aussage an, erste Aussage folgt.

Wir beweisen nur den zweiten Teil.

Existenz von Kreisen

Beweis.

Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ ein **längster** elementarer Weg (aber kein Kreis!).
Es gehen $g^+(v_k) \geq g$ Pfeile von v_k aus.
Diese gehen zu Knoten, welche der Pfad schon berührt $(v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$,
da sonst ein längerer elementarer Pfad existiert (Widerspruch zur Annahme).
Damit muss $k \geq g$ gelten, da G einfach ist.

$$P: \; v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_k$$

Wähle i minimal so dass $v_i = \omega(r)$ mit $r \in \delta^+(v_k)$.
Dann ist $P' = (v_i, r_{i+1}, \ldots, r_k, v_k) \circ (v_k, r, v_i)$ ein Kreis.
Es gilt $i \leq k - g$ und damit hat P' die Länge $k - i + 1 \geq g + 1$. $\square$

Existenz von Kreisen

Beweis.

Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ ein **längster** elementarer Weg (aber kein Kreis!).
Es gehen $g^+(v_k) \geq g$ Pfeile von v_k aus.
Diese gehen zu Knoten, welche der Pfad schon berührt $(v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$,
da sonst ein längerer elementarer Pfad existiert (Widerspruch zur Annahme).
Damit muss $k \geq g$ gelten, da G einfach ist.

$$P: \; v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_k \longrightarrow v_{k+1}$$

Wähle i minimal so dass $v_i = \omega(r)$ mit $r \in \delta^+(v_k)$.
Dann ist $P' = (v_i, r_{i+1}, \ldots, r_k, v_k) \circ (v_k, r, v_i)$ ein Kreis.
Es gilt $i \leq k - g$ und damit hat P' die Länge $k - i + 1 \geq g + 1$. □

Existenz von Kreisen

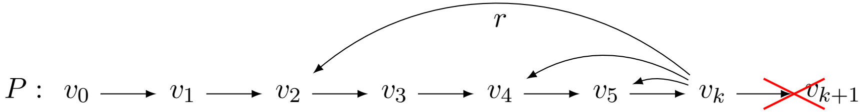
Beweis.
Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ ein **längster** elementarer Weg (aber kein Kreis!).
Es gehen $g^+(v_k) \geq g$ Pfeile von v_k aus.
Diese gehen zu Knoten, welche der Pfad schon berührt $(v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$,
da sonst ein längerer elementarer Pfad existiert (Widerspruch zur Annahme).
Damit muss $k \geq g$ gelten, da G einfach ist.

$$P: \quad v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_k \longrightarrow \cancel{v_{k+1}}$$

Wähle i minimal so dass $v_i = \omega(r)$ mit $r \in \delta^+(v_k)$.
Dann ist $P' = (v_i, r_{i+1}, \ldots, r_k, v_k) \circ (v_k, r, v_i)$ ein Kreis.
Es gilt $i \leq k - g$ und damit hat P' die Länge $k - i + 1 \geq g + 1$. $\square$

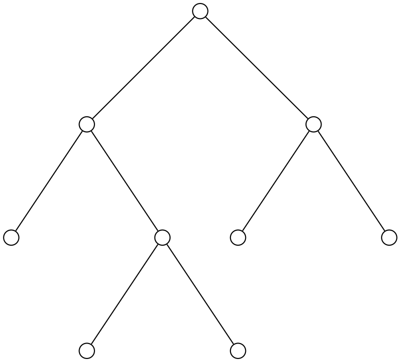
Existenz von Kreisen

Beweis.
Sei $P = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$ ein **längster** elementarer Weg (aber kein Kreis!).
Es gehen $g^+(v_k) \geq g$ Pfeile von v_k aus.
Diese gehen zu Knoten, welche der Pfad schon berührt $(v_0, v_1, \ldots v_{k-1})$,
da sonst ein längerer elementarer Pfad existiert (Widerspruch zur Annahme).
Damit muss $k \geq g$ gelten, da G einfach ist.

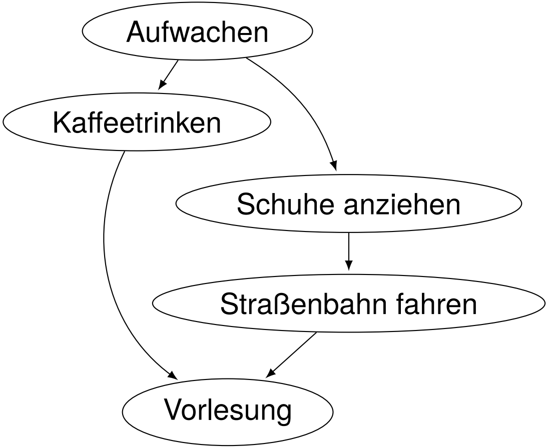


Wähle i minimal so dass $v_i = \omega(r)$ mit $r \in \delta^+(v_k)$.
Dann ist $P' = (v_i, r_{i+1}, \ldots, r_k, v_k) \circ (v_k, r, v_i)$ ein Kreis.
Es gilt $i \leq k - g$ und damit hat P' die Länge $k - i + 1 \geq g + 1$. $\square$

Kreisfreie Graphen



Ein Baum



Ein Prozessgraph

Kreisfreie Graphen

Definition 3.6

Ein Graph heißt *kreisfrei*, wenn er keine einfachen Kreise enthält.

Gerichtete kreisfreie Graphen werden auch DAG (Directed Acyclic Graph) genannt.

Definition 3.7

Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph.
Eine topologische Sortierung von G ist eine bijektive Abbildung

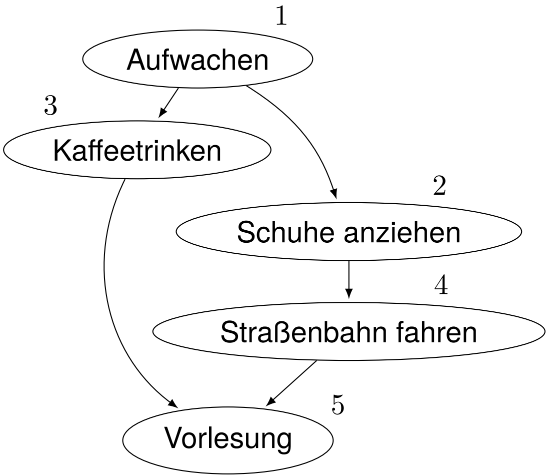
$$\sigma : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

mit

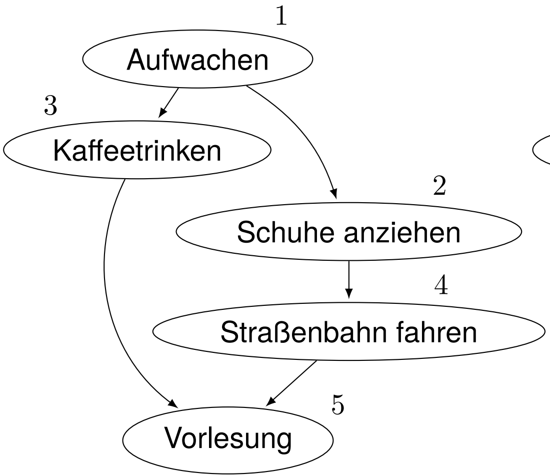
$$\forall r \in R : \sigma(\alpha(r)) < \sigma(\omega(r)) \quad .$$

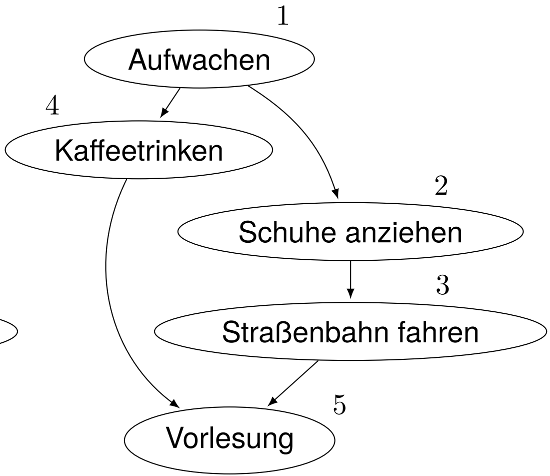
Viele Graphen haben erlauben mehrere topologische Sortierungen.

Topologische Sortierung – Beispiel



Topologische Sortierung – Beispiel





Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

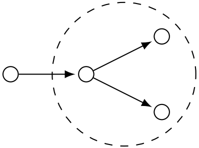
Beweis, Teil 1.

"$\Rightarrow$" Wenn G kreisfrei, dann existiert eine topologische Sortierung.
Wir verwenden vollständige Induktion über $n = |V|$.

Fall $n = 0$: offensichtlich

Fall $n > 0$:
Sei $v \in V(G)$ mit $g^-(v) = 0$. Einen solchen Knoten gibt es, da G kreisfrei ist.
Sei σ' ein topologische Sortierung von $G - v$.
Dann ist σ eine topologische Sortierung von G:

$$\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } u = v \\ 1 + \sigma'(u) & \text{sonst} \end{cases}$$



$G - v$

□

Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

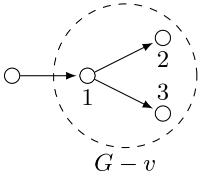
Beweis, Teil 1.

“$\Rightarrow$” Wenn G kreisfrei, dann existiert eine topologische Sortierung.
Wir verwenden vollständige Induktion über $n = |V|$.

Fall $n = 0$: offensichtlich

Fall $n > 0$:
Sei $v \in V(G)$ mit $g^-(v) = 0$. Einen solchen Knoten gibt es, da G kreisfrei ist.
Sei σ' ein topologische Sortierung von $G - v$.
Dann ist σ eine topologische Sortierung von G:

$$\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } u = v \\ 1 + \sigma'(u) & \text{sonst} \end{cases}$$



$\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

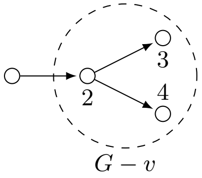
Beweis, Teil 1.

"$\Rightarrow$" Wenn G kreisfrei, dann existiert eine topologische Sortierung.
Wir verwenden vollständige Induktion über $n = |V|$.

Fall $n = 0$: offensichtlich

Fall $n > 0$:
Sei $v \in V(G)$ mit $g^-(v) = 0$. Einen solchen Knoten gibt es, da G kreisfrei ist.
Sei σ' ein topologische Sortierung von $G - v$.
Dann ist σ eine topologische Sortierung von G:

$$\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } u = v \\ 1 + \sigma'(u) & \text{sonst} \end{cases}$$



$\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.8

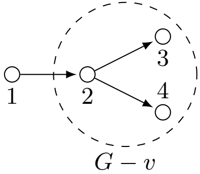
Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

Beweis, Teil 1.

“$\Rightarrow$” Wenn G kreisfrei, dann existiert eine topologische Sortierung.
Wir verwenden vollständige Induktion über $n = |V|$.

Fall $n = 0$: offensichtlich

Fall $n > 0$:
Sei $v \in V(G)$ mit $g^-(v) = 0$. Einen solchen Knoten gibt es, da G kreisfrei ist.
Sei σ' ein topologische Sortierung von $G - v$.
Dann ist σ eine topologische Sortierung von G:



$$\sigma(u) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } u = v \\ 1 + \sigma'(u) & \text{sonst} \end{cases}$$

$\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

Beweis, Teil 2.

"$\Leftarrow$" Wenn es eine topologische Sortierung gibt, dann ist der Graph kreisfrei.

Annahme:
Es gibt einen Kreis $C = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$, wobei $v_k = v_0$. Da es eine topologische Sortierung σ gib, muss gelten:

$$\sigma(v_0) < \sigma(v_1) < \ldots < \sigma(v_k)$$

und damit

$$\sigma(v_0) < \sigma(v_k) = \sigma(v_0) \quad .$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.8

Ein gerichteter Graph ist genau dann kreisfrei, wenn er eine topologische Sortierung besitzt.

Beweis, Teil 2.

“$\Leftarrow$” Wenn es eine topologische Sortierung gibt, dann ist der Graph kreisfrei.

Annahme:
Es gibt einen Kreis $C = (v_0, r_1, v_1, \ldots, r_k, v_k)$, wobei $v_k = v_0$. Da es eine topologische Sortierung σ gib, muss gelten:

$$\sigma(v_0) < \sigma(v_1) < \ldots < \sigma(v_k)$$

und damit

$$\lightning \quad \sigma(v_0) < \sigma(v_k) = \sigma(v_0) \quad .$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Topologische Sortierung – Vorbereitung

Algorithmus 2.2 Berechnung aller Innengrade

Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, R)$

for each $v \in V$ **do**
    $inGrad[v] := 0$

for each $v \in V$ **do**
    for each $w \in N^+(v)$ **do** ▷ Iteriere durch $ADJ[v]$
        $inGrad[w] := inGrad[w] + 1$

return $inGrad$

Algorithmus 2.2 hat Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$.

Topologische Sortierung

Algorithmus 3.1

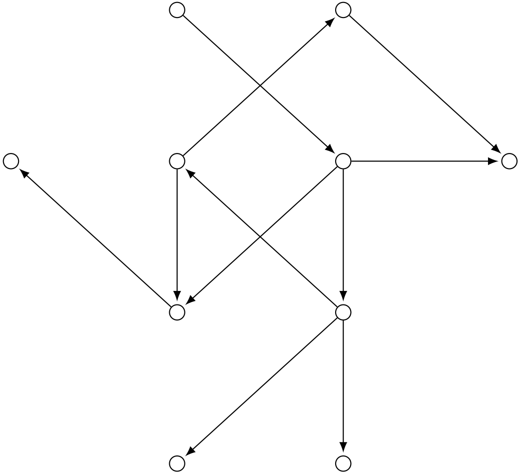
Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, R)$
Idee: entferne Knoten mit Innengrad 0 aus G, bis G leer ist.

Berechne Hilfsarray $inGrad$ mit Alg. 2.2

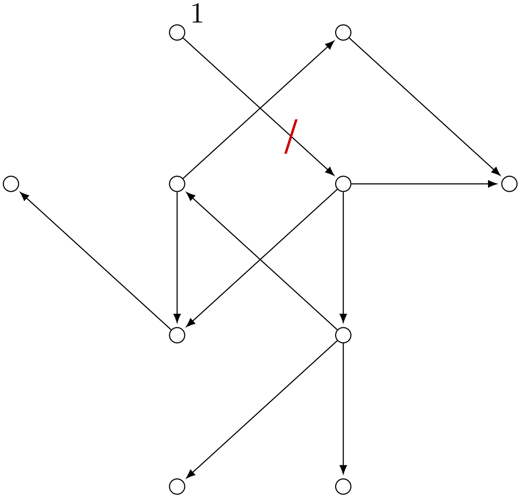
$L_0 := \{v \in V \mid inGrad[v] = 0\}$
for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  Wähle beliebiges $v \in L_0$
  $L_0 := L_0 \setminus \{v\}$
  $\sigma(v) := i$
  for each $w \in N^+(v)$ **do**
    $inGrad[w] := inGrad[w] - 1$
    if $inGrad[w] = 0$ **then**
      $L_0 := L_0 \cup \{w\}$

return σ

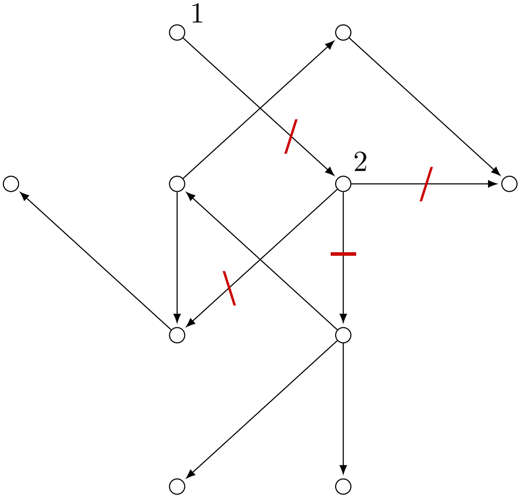
Topologische Sortierung – Beispiel



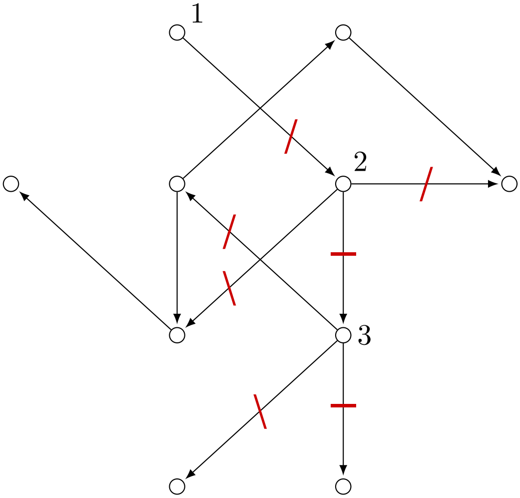
Topologische Sortierung – Beispiel



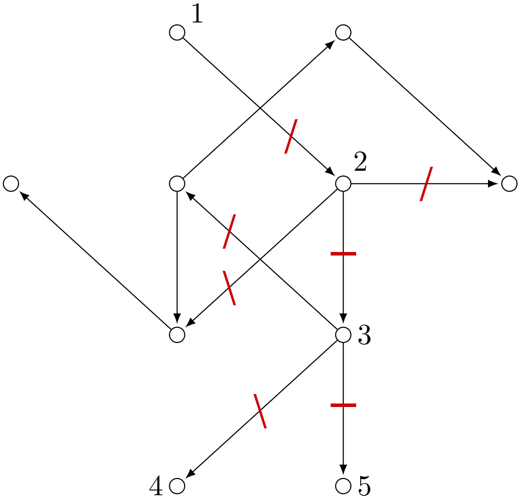
Topologische Sortierung – Beispiel



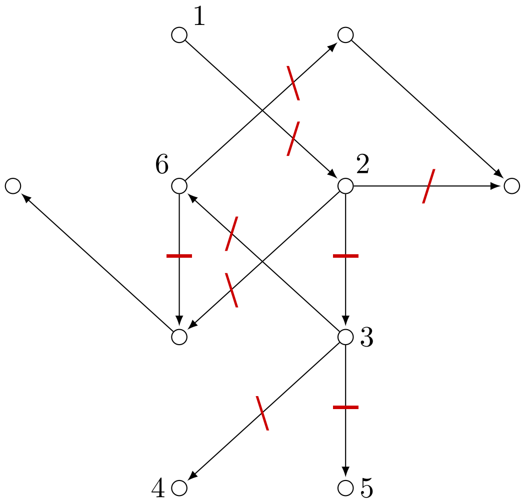
Topologische Sortierung – Beispiel



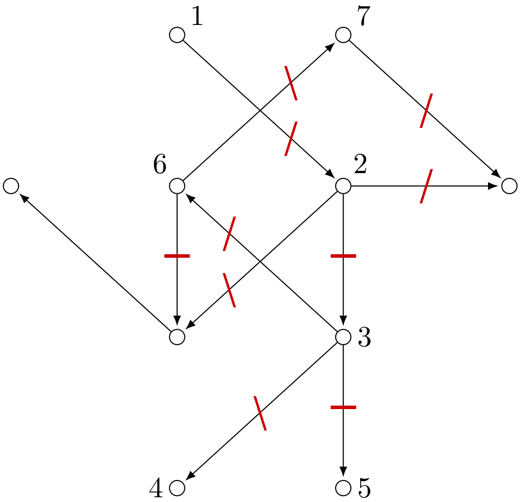
Topologische Sortierung – Beispiel



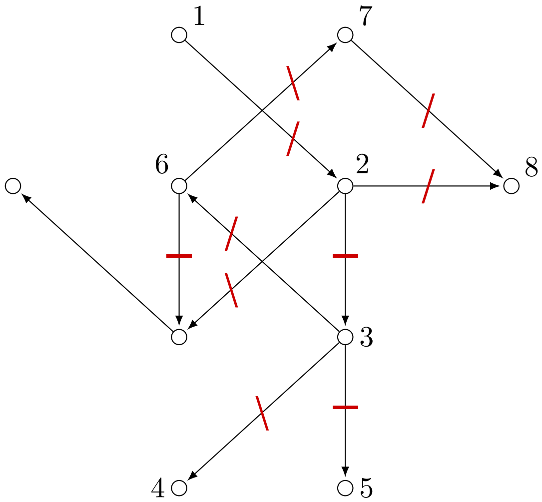
Topologische Sortierung – Beispiel



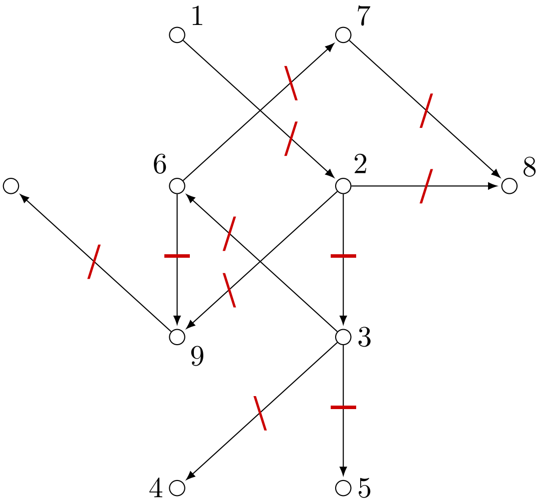
Topologische Sortierung – Beispiel



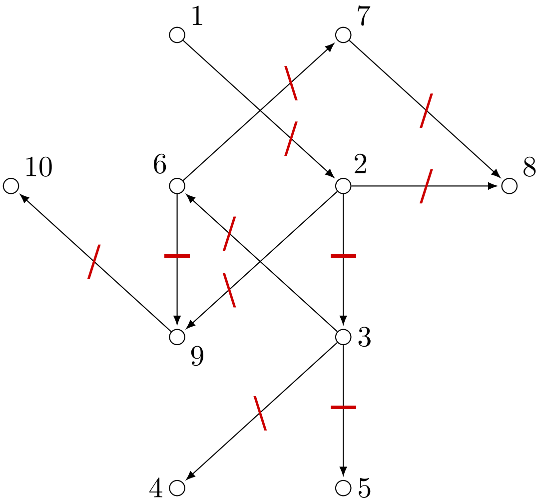
Topologische Sortierung – Beispiel



Topologische Sortierung – Beispiel



Topologische Sortierung – Beispiel



Topologische Sortierung

Satz 3.9

Algorithmus 3.1 berechnet eine topologische Sortierung in Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$.

Topologische Sortierung

Satz 3.9

Algorithmus 3.1 berechnet eine topologische Sortierung in Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$.

Beweis.

Initialisierung:

- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$ siehe Algo. 2.2

Innere for-each-Schleife:

- Laufzeit $\mathcal{O}(g^+(v))$

Äußere for-Schleife:

- Besucht jeden Knoten einmal
- Benutzt jede Kante einmal
- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

$\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.9
Algorithmus 3.1 berechnet eine topologische Sortierung in Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$.

Beweis.
Initialisierung:

- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$ — siehe Algo. 2.2

Innere for-each-Schleife:

- Laufzeit $\mathcal{O}(g^+(v))$

Äußere for-Schleife:

- Besucht jeden Knoten einmal
- Benutzt jede Kante einmal — Erinnerung: $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v)$
- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

$\square$

Topologische Sortierung

Satz 3.9

Algorithmus 3.1 berechnet eine topologische Sortierung in Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$.

Beweis.

Initialisierung:

- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$ siehe Algo. 2.2

Innere for-each-Schleife:

- Laufzeit $\mathcal{O}(g^+(v))$

Äußere for-Schleife:

- Besucht jeden Knoten einmal
- Benutzt jede Kante einmal Erinnerung: $|R| = \sum_{v \in V} g^+(v)$
- Laufzeit $\mathcal{O}(n+m)$

$\square$

Annahme: G liegt in Adjazenzlisten-Repräsentation vor