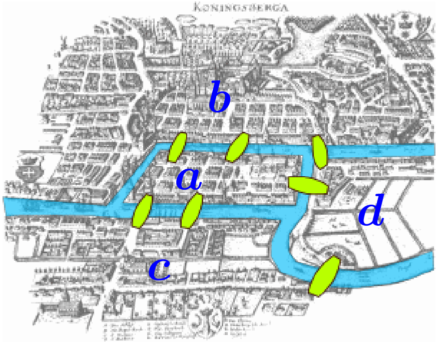
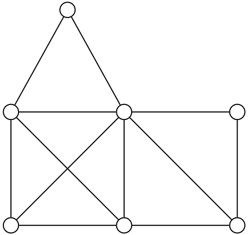
Graphentheorie
07 – Eulersche Wege und Kreise

Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Motivation



Königsberger Brückenproblem



Haus vom Nikolaus mit Anbau

[1] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Königsberger_Brückenproblem

Eulersche Wege und Kreise

Definition 3.25

Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph.
Weg P heißt *Eulersch*, wenn P jede Kante aus G genau einmal enthält.
Ist P ein Kreis, dann heißt P *Eulerscher Kreis*.

G heißt *Eulersch*, wenn er einen Eulerschen Kreis enthält.

Beispiele:

- Haus vom Nikolaus zeichnet man entlang eines Eulerschen Weges
- Haus vom Nikolaus hat keinen Eulerschen Kreis

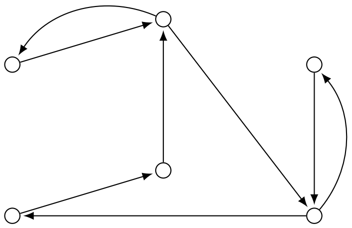
Satz von Euler – gerichtet

Satz 3.26 (Satz von Euler, Teil 1)

Sei $G = (V, R)$ endlich, gerichtet und schwach zusammenhängend.
Graph G ist genau dann Eulersch, wenn $\forall v \in V : g^+(v) = g^-(v)$.

Korollar 3.28

Jeder endliche, gerichtete und schwach zusammenhängende Graph G mit $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V$ ist stark zusammenhängend.

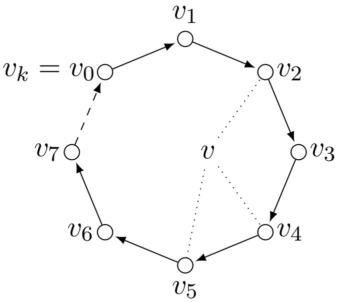


Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 1.

"⇒" Wenn G Eulersch, dann $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V$.

- Fall $R = \emptyset$. Dann $g^+(v) = g^-(v) = 0\ \forall v \in V$.
- Fall $R \neq \emptyset$.
  Sei $P = (v_0, r_1, v_1, r_2, v_2, \ldots, v_k)$ ein Eulerscher Kreis.
  P berührt Knoten v genau x-mal $\Rightarrow g^+(v) = g^-(v) = x$



Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

"$\Leftarrow$" Wenn $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V$, dann G Eulersch.
Idee: Beweis per Induktion nach $|R|$.

Fall $|R| = 0$.

- Dann $V = \emptyset$ oder $V = \{v\}$ mit $g^+(v) = g^-(v) = 0$

Fall $|R| = 1$.

- Dann $V = \{v\}$ und $g^+(v) = g^-(v) = 1$
- Kante muss eine Schlinge sein

Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

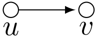
“$\Leftarrow$” Wenn $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V$, dann G Eulersch.
Idee: Beweis per Induktion nach $|R|$.

Fall $|R| = 0$.

- Dann $V = \emptyset$ oder $V = \{v\}$ mit $g^+(v) = g^-(v) = 0$

Fall $|R| = 1$.

- Dann $V = \{v\}$ und $g^+(v) = g^-(v) = 1$
- Kante muss eine Schlinge sein



Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

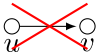
"$\Leftarrow$" Wenn $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V$, dann G Eulersch.
Idee: Beweis per Induktion nach $|R|$.

Fall $|R| = 0$.

- Dann $V = \emptyset$ oder $V = \{v\}$ mit $g^+(v) = g^-(v) = 0$

Fall $|R| = 1$.

- Dann $V = \{v\}$ und $g^+(v) = g^-(v) = 1$
- Kante muss eine Schlinge sein



Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

Fall $|R| = k > 1$.

- Wähle Knoten $v_0 \in V$ als Startknoten von Weg P
- Folge Kanten und benutze jede Kante höchstens einmal
- Sei v_k der Endknoten des resultierendem Weges P
- Annahme: $v_0 \neq v_k$
  Dann muss gelten: $g^+(v_k) < g^-(v_k)$ – Widerspruch ↯
  $\Rightarrow v_0 = v_k$, d.h. P ist einfacher Kreis

Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

Fall $|R| = k > 1$.

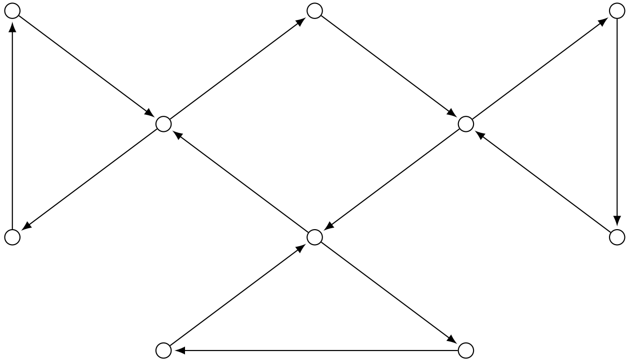
- Finde einfachen Kreis P, setze $G' := G$
- Entferne Kanten von P aus G'
- Entferne alle Knoten mit Grad 0 aus G'.
- Es gilt immernoch $g^+_{G'}(v) = g^-_{G'}(v)\ \forall v \in V(G')$
- G' zerfällt in schwache Zusammenhangskomponenten:

$$V(G') = ZK_1 \,\dot\cup\, ZK_2 \,\dot\cup\, ZK_3 \,\dot\cup\, \ldots$$

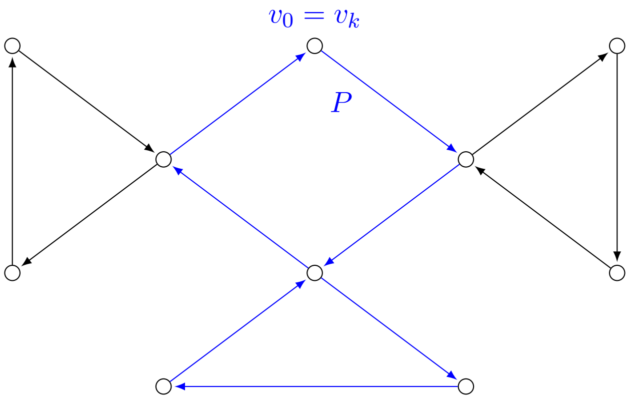
- Sei P_i Eulerscher Kreis von $G'[ZK_i]$
  (existiert per Induktionsvoraussetzung)
- Jeder P_i teilt sich mindestens einen Knoten mit P
- Kombiniere P und alle P_i zu einem Eulerschen Kreis für G

$\square$

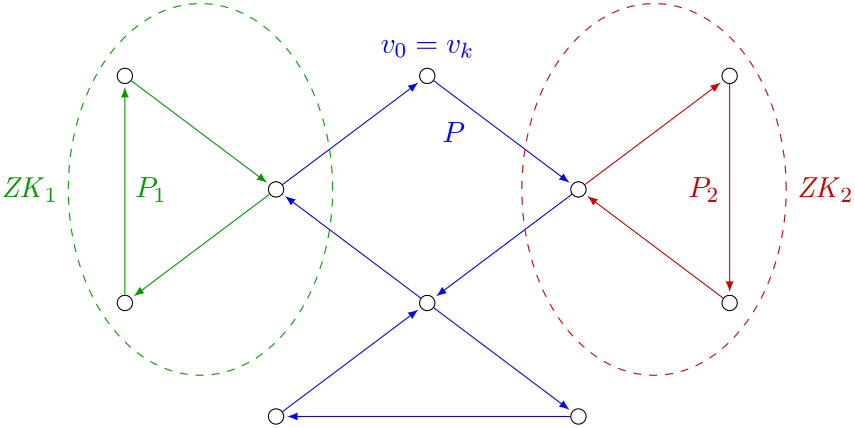
Satz von Euler – Beispiel



Satz von Euler – Beispiel



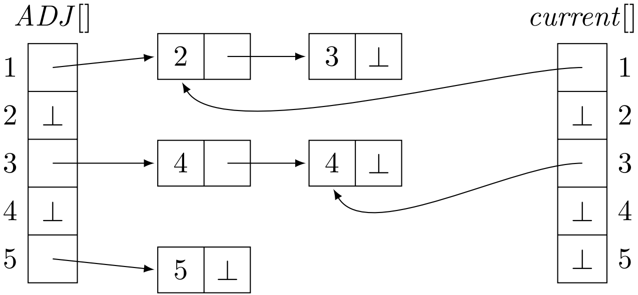
Satz von Euler – Beispiel



Eulersche Kreise – Algorithmen

Vorbereitung:

- Sei $ADJ[]$ ein Array von Adjazenzlisten
- Algorithmen 3.4 und 3.5 benutzen Hilfsarray $current[]$
- $current[v]$ ist Zeiger auf Element aus $ADJ[v]$ oder $\perp$
- $current[v]$ und alle in $ADJ[v]$ nachfolgenden Kanten sind unbenutzt
- Kanten vor $current[v]$ wurden bereits benutzt
- $current[v] = \perp$, wenn alle Kanten aus $ADJ[v]$ benutzt wurden



Eulersche Kreise – Algorithmen

Algorithmus 3.4 ERFORSCHE$(G, v_0, current)$

Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, R)$
Knoten $v_0 \in V$ und das Array $current$

$v := v_0$
$K := (v)$ ▷ Weg der Länge 0
while $current[v] \neq \perp$ **do**
  $w := current[v]$
  Rücke $current[v]$ um ein Element weiter in $ADJ[v]$
  $K := K \circ (v, r_{vw}, w)$ ▷ r_{vw} ist Kante von v nach w
  $v := w$
return K

Eulersche Kreise – Algorithmen

Algorithmus 3.5 Bestimmung eines Eulerschen Kreises

Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, R)$

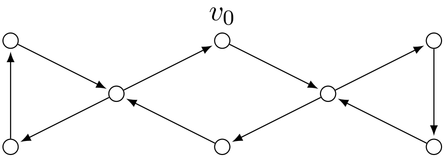
for each $v \in V$ **do**
    $current[v] := ADJ[v]$

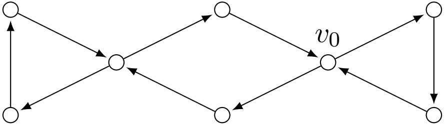
Wähle Knoten $v_0 \in V$
$v := v_0$
$C := (v)$ ▷ Kreis der Länge 0
repeat
    if $current[v] \neq \perp$ **then**
        $K :=$ ERFORSCHE$(G, v, current)$ ▷ K startet und endet in v
        Füge K in C hinter v ein
    $v :=$ Knoten der in C auf v folgt
until $v = v_0$
return C

Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n+m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal

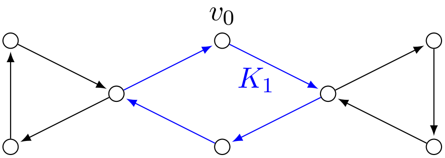


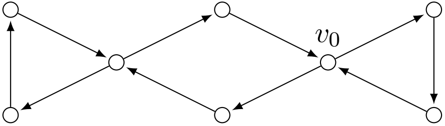


Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n+m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal

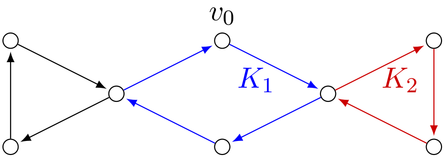


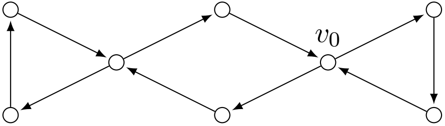


Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n + m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal

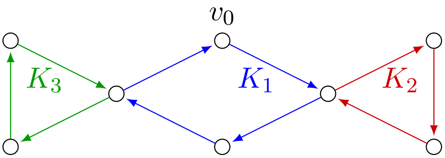


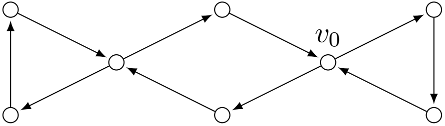


Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n+m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal

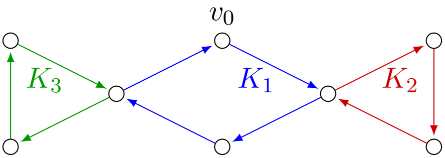


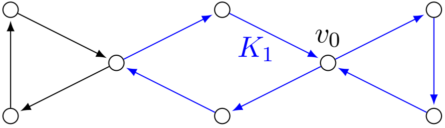


Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n + m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal

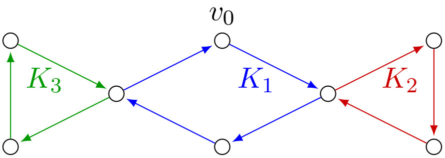


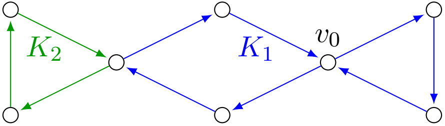


Eulersche Kreise – Beispiel

Algorithmus 3.5 hat Laufzeit $O(n+m)$:

- Besucht jeden Knoten höchstens zweimal
- Benutzt jede Kante höchstens zweimal





Satz von Euler – gerichtet

Satz 3.31 (Satz von Euler, Teil 2)

Sei G endlich, gerichtet und schwach zusammenhängend.
Graph G besitzt genau dann einen Eulerschen Weg, wenn es $s, t \in V$ gibt mit

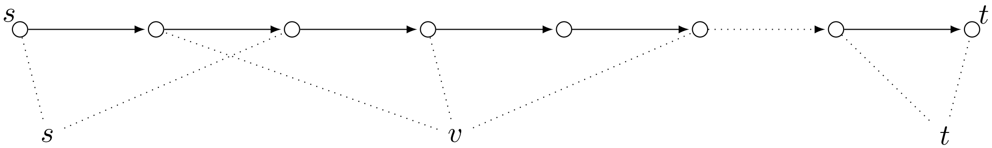
- $s \neq t$
- $g^+(s) = g^-(s) + 1$
- $g^+(t) = g^-(t) - 1$
- $g^+(v) = g^-(v)\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$

Knoten s und t sind Anfangs- bzw. Endknoten des Eulerschen Weges.

Satz von Euler – Beweis

Beweis.

"$\Rightarrow$"



"$\Leftarrow$"

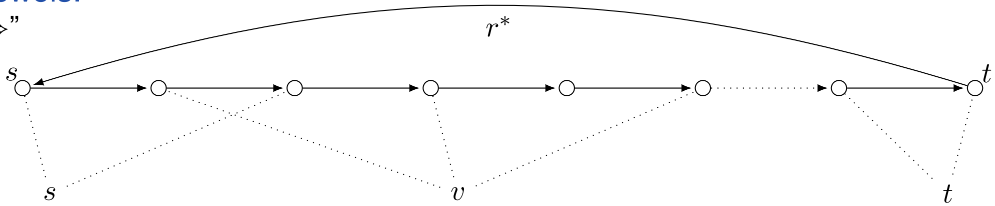
- Füge Kante r^* mit $\alpha(r^*) = t$ und $\omega(r^*) = s$ ein.
- Dann existiert Eulerscher Kreis C nach Satz 3.26
- Entferne r^* aus C
- Resultat: Eulerscher Weg in G

$\square$

Satz von Euler – Beweis

Beweis.

"$\Rightarrow$"



"$\Leftarrow$"

- Füge Kante r^* mit $\alpha(r^*) = t$ und $\omega(r^*) = s$ ein.
- Dann existiert Eulerscher Kreis C nach Satz 3.26
- Entferne r^* aus C
- Resultat: Eulerscher Weg in G

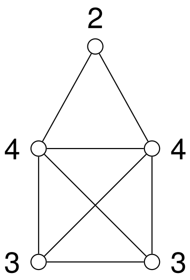
$\square$

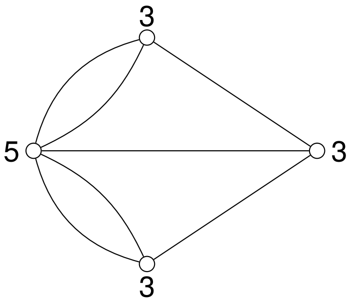
Satz von Euler – ungerichtet

Satz 3.32 (Satz von Euler, Teil 3)

Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph

a) ist genau dann Eulersch, wenn alle Knoten geraden Grad haben.
b) enthält genau dann einen Eulerschen Weg, wenn genau 2 Knoten ungeraden Grad haben (alle anderen Knoten haben geraden Grad).

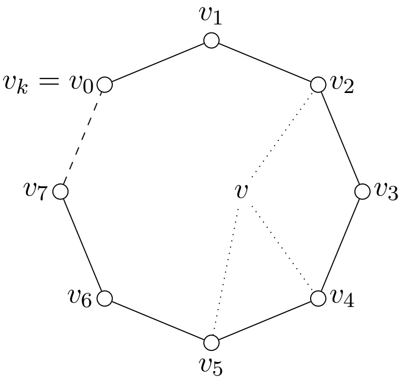




Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 1.

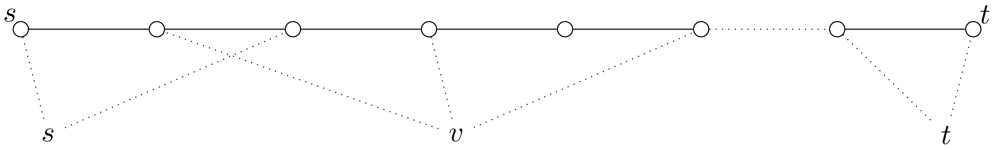
a) “$\Rightarrow$” Beweis durch Abzählen der Kanten



Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 1.

b) “⇒” Beweis durch Abzählen der Kanten



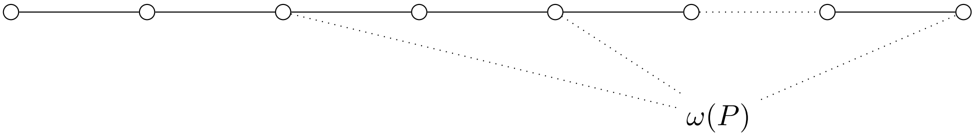
Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

a) “$\Leftarrow$”
Sei P einfacher Weg P maximaler Länge
Behauptung: P ist kein Eulerscher Kreis

Fall 1: P ist kein Kreis

- $\omega(P)$ muss ungeraden Grad haben
- Widerspruch↯ zur Annahme, dass alle Knoten geraden Grad haben



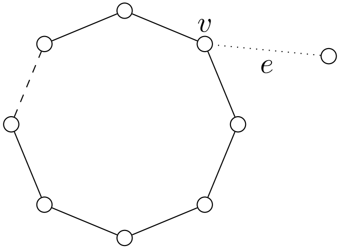
Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

a) “$\Leftarrow$”
Sei P einfacher Weg P maximaler Länge
Behauptung: P ist kein Eulerscher Kreis

Fall 2: Es gibt Kante $e = [v, w]$ die nicht in P ist, v wird von P berührt

- o.B.d.A. sei $\omega(P) = v$
- Sei $P' = P \circ (v, e, w)$
- P' ist einfacher Weg und länger als P $\lightning$
- Widerspruch zur Maximalität der Länge von P



Satz von Euler – Beweis

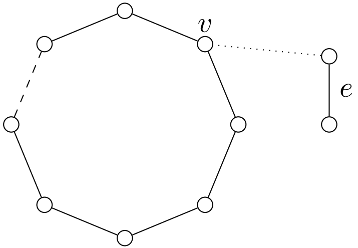
Beweis, Teil 2.

a) "$\Leftarrow$"
Sei P einfacher Weg P maximaler Länge
Behauptung: P ist kein Eulerscher Kreis

Fall 3: Es gibt Kante e die nicht in P ist, P berührt keinen Endknoten von e

- Graph ist zusammenhängend
- Es muss Weg von P zu Endknoten von e geben
- Aus Fall 2 folgt ein Widerspruch $\lightning$

Damit muss P ein Eulerscher Kreis sein.



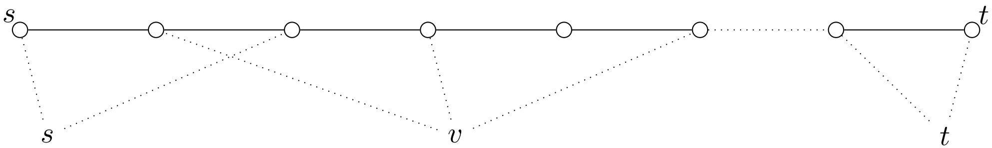
Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

b) “$\Leftarrow$”

- Seiten s, t die beiden Knoten mit ungeradem Grad
- Füge Kante e^* von t nach s hinzu
- Es muss einen einen Eulerschen Kreis geben
- Entfernen von e^* ergibt Eulerschen Weg

$\square$



Satz von Euler – Beweis

Beweis, Teil 2.

b) "$\Leftarrow$"

- Seiten s, t die beiden Knoten mit ungeradem Grad
- Füge Kante e^* von t nach s hinzu
- Es muss einen einen Eulerschen Kreis geben
- Entfernen von e^* ergibt Eulerschen Weg

$\square$