Graphentheorie
08 – Hamiltonsche Wege und Kreise

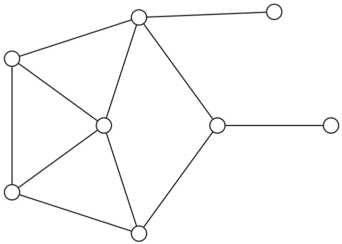
Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

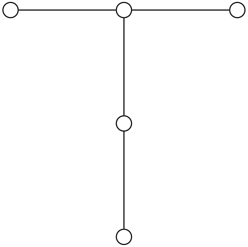
Hamiltonsche Wege und Kreise

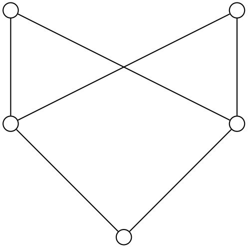
Definition 3.34

Ein Weg P in G heißt *Hamiltonsch*, falls P jeden Knoten genau einmal berührt.
Ein Kreis K in G heißt *Hamiltonsch*, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.
(Start/Endknoten zählt nur einmal)

Der Graph G heißt *Hamiltonsch*, wenn er einen Hamiltonschen Kreis besitzt.



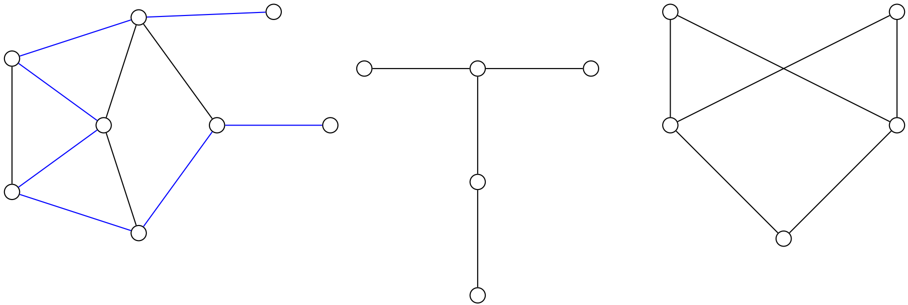




Hamiltonsche Wege und Kreise

Definition 3.34
Ein Weg P in G heißt *Hamiltonsch*, falls P jeden Knoten genau einmal berührt.
Ein Kreis K in G heißt *Hamiltonsch*, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.
(Start/Endknoten zählt nur einmal)

Der Graph G heißt *Hamiltonsch*, wenn er einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

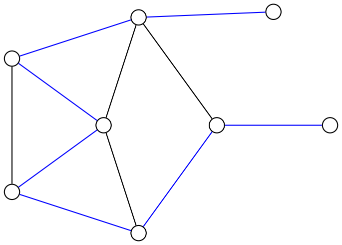


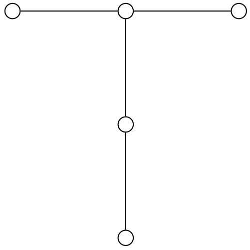
Hamiltonsche Wege und Kreise

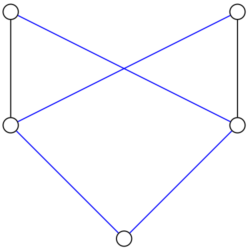
Definition 3.34

Ein Weg P in G heißt *Hamiltonsch*, falls P jeden Knoten genau einmal berührt.
Ein Kreis K in G heißt *Hamiltonsch*, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.
(Start/Endknoten zählt nur einmal)

Der Graph G heißt *Hamiltonsch*, wenn er einen Hamiltonschen Kreis besitzt.





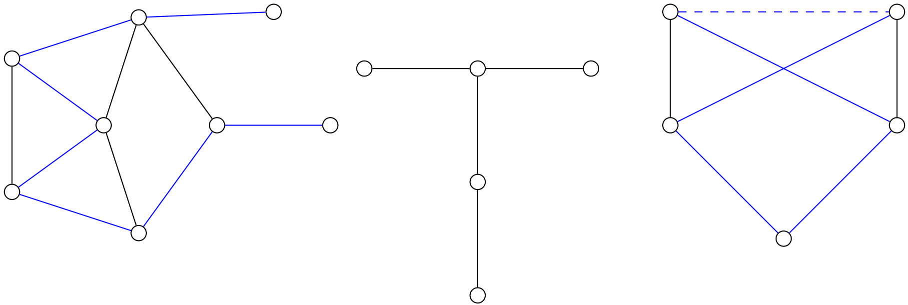


Hamiltonsche Wege und Kreise

Definition 3.34

Ein Weg P in G heißt *Hamiltonsch*, falls P jeden Knoten genau einmal berührt.
Ein Kreis K in G heißt *Hamiltonsch*, falls K jeden Knoten genau einmal berührt.
(Start/Endknoten zählt nur einmal)

Der Graph G heißt *Hamiltonsch*, wenn er einen Hamiltonschen Kreis besitzt.



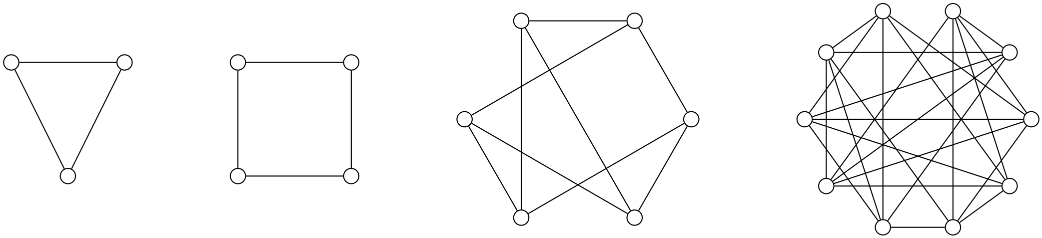
Satz von Dirac

Es gibt keinen "Satz von Euler" für Hamiltonsche Wege/Kreise

- "einfache" hinreichende und notwendige Bedingung für Hamiltonsche Wege/Kreise bislang unbekannt
- Berechnung Hamiltonsche Kreise nicht effizient möglich
- Entscheidungsproblem ist NP-vollständig

Satz von Dirac

Sei $G = (V, E)$ einfach und ungerichtet mit $n = |V| \geq 3$.
Wenn $g(v) \geq \frac{n}{2}$ für alle $v \in V$, dann ist G Hamiltonsch.



Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 1.

Annahme: G ist nicht zusammenhängend.
Sei C die kleinste Zusammenhangskomponente von G.

Fall $|C| > \frac{n}{2}$:

- Sei $C' \neq C$ eine Zusammenhangskomponente
- Dann gilt $|C'| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ ↯
- Widerspruch: C' ist kleiner als C

Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 1.

Annahme: G ist nicht zusammenhängend.
Sei C die kleinste Zusammenhangskomponente von G.

Fall $|C| > \frac{n}{2}$:

- Sei $C' \neq C$ eine Zusammenhangskomponente
- Dann gilt $|C'| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ ↯
- Widerspruch: C' ist kleiner als C

Fall $|C| \leq \frac{n}{2}$:

- Sei $v \in C$
- Dann gilt $g(v) \leq \frac{n}{2} - 1$ ↯
- Widerspruch zu $g(v) \geq \frac{n}{2}$!

Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 1.

Annahme: G ist nicht zusammenhängend.
Sei C die kleinste Zusammenhangskomponente von G.

Fall $|C| > \frac{n}{2}$:

- Sei $C' \neq C$ eine Zusammenhangskomponente
- Dann gilt $|C'| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ ↯
- Widerspruch: C' ist kleiner als C

Fall $|C| \leq \frac{n}{2}$:

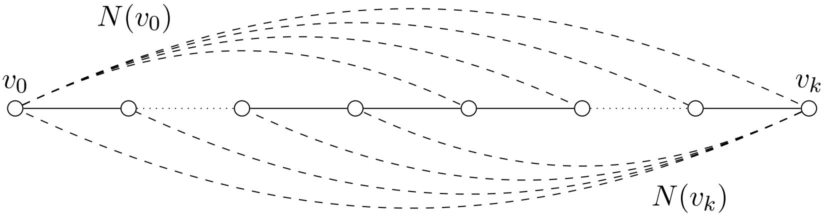
- Sei $v \in C$
- Dann gilt $g(v) \leq \frac{n}{2} - 1$ ↯
- Widerspruch zu $g(v) \geq \frac{n}{2}$!

G muss also zusammenhängend sein!

Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 2.

Sei $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ ein längster elementarer Weg in G.
Weg P berührt alle Knoten aus $N(v_0)$ und $N(v_k)$.
Ansonsten ließe sich P von v_0 oder v_k aus verlängern.



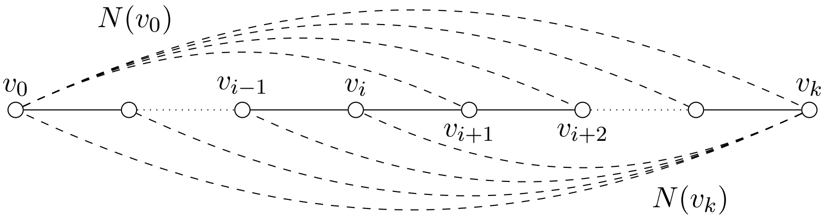
Damit gilt $k \geq \frac{n}{2}$, da v_0 bzw. v_k einen Grad von mindestens $\frac{n}{2}$ haben.
Außerdem gilt $k \leq n - 1$, denn P berührt jeden Knoten von G höchstens einmal.

Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 3.

Behauptung: $\exists i \in [0, k-1] : v_{i+1} \in N(v_0) \ \wedge \ v_i \in N(v_k)$.

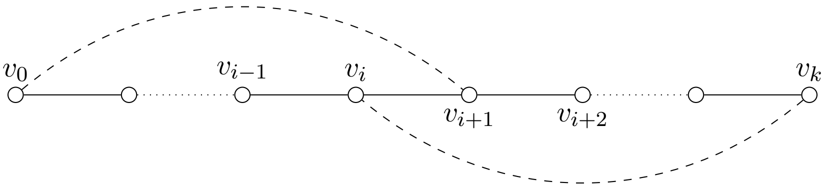
- $k \leq n-1$
- Es gibt $\frac{n}{2}$ Indizes $i \in [0, k-1]$ mit $v_i \in N(v_k)$
- Es gibt $\frac{n}{2}$ Indizes $i \in [0, k-1]$ mit $v_{i+1} \in N(v_0)$
- Schubfachprinzip: es existiert $i \in [0, k-1]$ mit beiden Eigenschaften



Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 4.

Sei $i \in [0, k-1]$ mit $v_{i+1} \in N(v_0)$ und $v_i \in N(v_k)$.

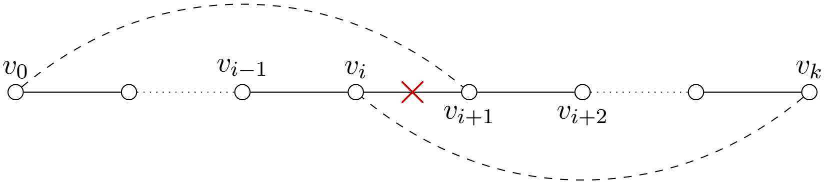


- Entferne Kante $[v_i, v_{i+1}]$ aus P
- Füge Kanten $[v_i, v_k]$ und $[v_0, v_{i+1}]$ ein
- Ergibt Kreis $K = (v_0, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i, \ldots, v_0)$.
- $|K| = |P| + 1 = k + 1 \leq n$

Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 4.

Sei $i \in [0, k-1]$ mit $v_{i+1} \in N(v_0)$ und $v_i \in N(v_k)$.



- Entferne Kante $[v_i, v_{i+1}]$ aus P
- Füge Kanten $[v_i, v_k]$ und $[v_0, v_{i+1}]$ ein
- Ergibt Kreis $K = (v_0, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i, \ldots, v_0)$.
- $|K| = |P| + 1 = k + 1 \leq n$

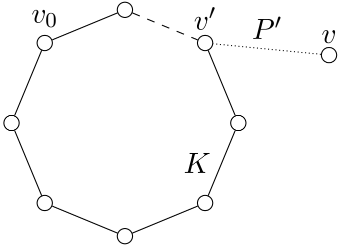
Satz von Dirac – Beweis

Beweis, Teil 5.

Behauptung: K ist ein kein Hamiltonscher Kreis.

Dann existiert Knoten $v \in V$ welcher von K nicht berührt wird.

- G is zusammenhängend
- Es existiert elementarer Weg P' von v zu v_0
- Sei v' der erste gemeinsame Knoten von P und K
- Entferne eine Kante inzident zu v' aus K
- Verlängere K entlang Prefix von P'
- Elementarer Weg mit mind. $k+1$ Kanten existiert ⚡
- Widerspruch zur Maximalität der Länge von P



Damit muss K Hamiltonsch sein. $\square$