

Graphentheorie

09 – Bäume und Wälder

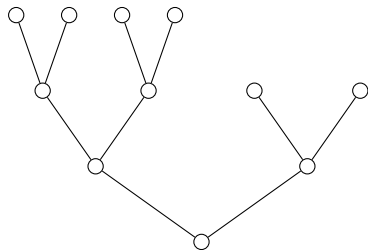
Dr. Sven Köhler
Rechnernetze und Telematik
Technische Fakultät
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bäume und Wälder

Definition 6.1

Ein ungerichteter einfacher kreisfreier Graph G heißt *Wald*.
Ist G zusätzlich zusammenhängend, dann heißt G *Baum*.

Hinweis: Ein einzelner Baum ist auch ein Wald.

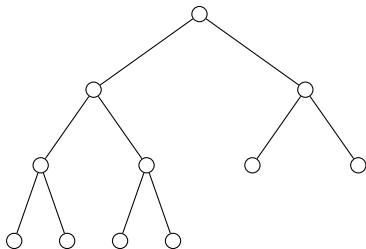


Bäume und Wälder

Definition 6.1

Ein ungerichteter einfacher kreisfreier Graph G heißt *Wald*.
Ist G zusätzlich zusammenhängend, dann heißt G *Baum*.

Hinweis: Ein einzelner Baum ist auch ein Wald.

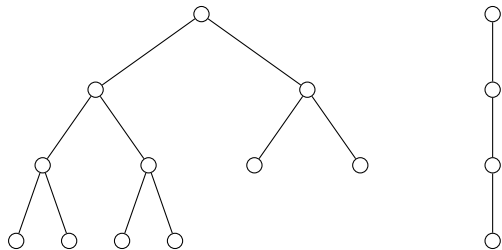


Bäume und Wälder

Definition 6.1

Ein ungerichteter einfacher kreisfreier Graph G heißt *Wald*.
Ist G zusätzlich zusammenhängend, dann heißt G *Baum*.

Hinweis: Ein einzelner Baum ist auch ein Wald.



Bäume – Eigenschaften

Satz 6.3

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis, aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .
- 4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
- 6) G enthält keinen elementaren Kreis und $|E| = |V| - 1$

Bäume – Eigenschaften

Satz 6.3

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis, aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .
- 4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
- 6) G enthält keinen elementaren Kreis und $|E| = |V| - 1$

Beweis: 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 1)

Bäume – Eigenschaften

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis,
aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

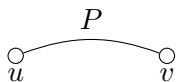
Sei $H = (V', E')$ Obergraph mit $V' = V$ und $E' \supset E$.

Betrachte Kante $e = [u, v] \in E' \setminus E$.

Baum G ist zusammenhängend und kreisfrei.

Es existiert elementarer Weg P von v zu u in G .

$P \circ (u, e, v)$ ist elementarer Kreis in H .



Bäume – Eigenschaften

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis, aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

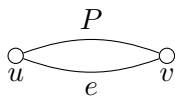
Sei $H = (V', E')$ Obergraph mit $V' = V$ und $E' \supset E$.

Betrachte Kante $e = [u, v] \in E' \setminus E$.

Baum G ist zusammenhängend und kreisfrei.

Es existiert elementarer Weg P von v zu u in G .

$P \circ (u, e, v)$ ist elementarer Kreis in H .



Bäume – Eigenschaften

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis,
aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

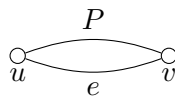
Sei $H = (V', E')$ Obergraph mit $V' = V$ und $E' \supset E$.

Betrachte Kante $e = [u, v] \in E' \setminus E$.

Baum G ist zusammenhängend und kreisfrei.

Es existiert elementarer Weg P von v zu u in G .

$P \circ (u, e, v)$ ist elementarer Kreis in H .



2) \Rightarrow 3):

Annahme: Es gibt zwei Wege von u nach v .

Dann hat G einen elementaren Kreis. ⚡

Bäume – Eigenschaften

- 1) G ist ein Baum
- 2) G enthält keinen elementaren Kreis,
aber jeder echte Obergraph mit gleicher Knotenmenge.
- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

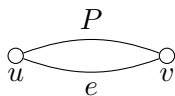
Sei $H = (V', E')$ Obergraph mit $V' = V$ und $E' \supset E$.

Betrachte Kante $e = [u, v] \in E' \setminus E$.

Baum G ist zusammenhängend und kreisfrei.

Es existiert elementarer Weg P von v zu u in G .

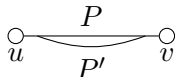
$P \circ (u, e, v)$ ist elementarer Kreis in H .



2) \Rightarrow 3):

Annahme: Es gibt zwei Wege von u nach v .

Dann hat G einen elementaren Kreis. ⚡



Bäume – Eigenschaften

- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .
- 4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Beweisskizze.

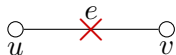
3) \Rightarrow 4):

Sei $e = [u, v] \in E$.

Es gibt genau einen Weg von u nach v , nämlich $P = (u, e, v)$.

Dann gibt es in $G - e$ keinen Weg von u nach v .

Damit ist $G - e$ nicht zusammenhängend.



Bäume – Eigenschaften

- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .
- 4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Beweisskizze.

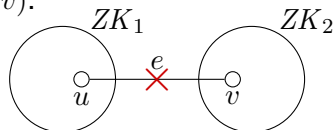
3) \Rightarrow 4):

Sei $e = [u, v] \in E$.

Es gibt genau einen Weg von u nach v , nämlich $P = (u, e, v)$.

Dann gibt es in $G - e$ keinen Weg von u nach v .

Damit ist $G - e$ nicht zusammenhängend.



Bäume – Eigenschaften

- 3) Für jedes Paar $u, v \in V$ existiert genau ein elementarer Weg von u nach v .
- 4) G ist zusammenhängend und für jede Kante $e \in E$ ist $G - e$ nicht zusammenhängend
- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Beweisskizze.

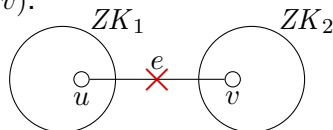
3) \Rightarrow 4):

Sei $e = [u, v] \in E$.

Es gibt genau einen Weg von u nach v , nämlich $P = (u, e, v)$.

Dann gibt es in $G - e$ keinen Weg von u nach v .

Damit ist $G - e$ nicht zusammenhängend.



4) \Rightarrow 5):

Sei $|E| \neq |V| - 1$. Beobachtung:

Graphen mit $|V| - 2$ Kanten sind nicht zusammenhängend. ⚡

Graphen mit $|V|$ Kanten müssen einen Kreis haben. ⚡



Bäume – Eigenschaften

- 5) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.
- 6) G enthält keinen elementaren Kreis und $|E| = |V| - 1$
- 1) G ist ein Baum

Beweisskizze.

5) \Rightarrow 6):

Annahme: G zusammenhängend und besitzt elementaren Kreis C .

Entferne eine Kante von C .

Dann ist G immer noch zusammenhängend.

G hat aber nur $|V| - 2$ Kanten. ⚡

6) \Rightarrow 1):

Laut 6) ist G kreisfrei. Zu zeigen: G ist zusammenhängend.

Annahme: G kreisfrei mit genau zwei Zusammenhangskomponenten ZK_1, ZK_2 .

Es gilt $ZK_1 \cup ZK_2 = V$ bzw. $|ZK_1| + |ZK_2| = |V|$.

Damit hat G genau $|ZK_1| - 1 + |ZK_2| - 1 = |V| - 2$ Kanten. ⚡



Gerichtete Bäume

Definition 6.41

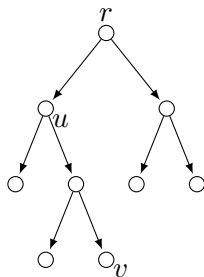
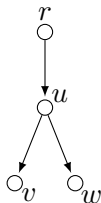
Sei $G = (V, R)$ ein gerichteter einfacher kreisfreier Graph. G heißt r -*Wurzelbaum*, wenn $E_G(r) = V$ und der zu G zugeordnete Graph ein (ungerichteter) Baum ist. Knoten mit $g^+(v) = 0$ heißen *Blätter* und r heißt *Wurzelknoten*.

Knoten u und $v \in E_G(u) \setminus \{u\}$:

- u heißt *Vorfahre* von v
- v heißt *Nachfahre* von u

Knoten u und $v, w \in N_G^+(u)$:

- u heißt *Elternknoten* von v
- v heißt *Kindknoten* von u
- v und w sind *Geschwisterknoten*



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Satz 6.42

Sei G ein gerichteter Graph. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) G ist ein r -Wurzelbaum
- 2) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) = 1$ für alle $v \neq r$
und der zu G zugeordnete Graph ist ein Baum
- 3) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \neq r$
und $E_G(r) = V(G)$

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Satz 6.42

Sei G ein gerichteter Graph. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) G ist ein r -Wurzelbaum
- 2) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) = 1$ für alle $v \neq r$
und der zu G zugeordnete Graph ist ein Baum
- 3) $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \neq r$
und $E_G(r) = V(G)$

Beweis: 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

Sei G ein r -Wurzelbaum. Dann gilt $E_G(r) = V(G)$.

Annahme: $g^-(r) > 0$.

Sei v Vorgänger von r . Dann ist $v \in E_G(r)$.

Es gibt also Weg von r zu v und von v zu r .

Somit existiert ein Kreis in G . ⚡

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) = 0$

Dann $v \notin E_G(r)$. ⚡

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) > 1$

Es gibt mind. 2 Wege von r zu v .

Somit existiert ein Kreis im zugeordneten Graph. ⚡



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

Sei G ein r -Wurzelbaum. Dann gilt $E_G(r) = V(G)$.

Annahme: $g^-(r) > 0$.

Sei v Vorgänger von r . Dann ist $v \in E_G(r)$.

Es gibt also Weg von r zu v und von v zu r .

Somit existiert ein Kreis in G . ⚡

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) = 0$

Dann $v \notin E_G(r)$. ⚡

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) > 1$

Es gibt mind. 2 Wege von r zu v .

Somit existiert ein Kreis im zugeordneten Graph. ⚡



□

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

1) \Rightarrow 2):

Sei G ein r -Wurzelbaum. Dann gilt $E_G(r) = V(G)$.

Annahme: $g^-(r) > 0$.

Sei v Vorgänger von r . Dann ist $v \in E_G(r)$.

Es gibt also Weg von r zu v und von v zu r .

Somit existiert ein Kreis in G . ⚡



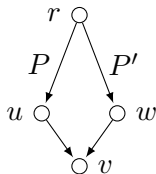
Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) = 0$

Dann $v \notin E_G(r)$. ⚡

Annahme: $\exists v \neq r : g^-(v) > 1$

Es gibt mind. 2 Wege von r zu v .

Somit existiert ein Kreis im zugeordneten Graph. ⚡



□

Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

2) \Rightarrow 3):

Laut 2) gilt sicherlich $g^-(r) = 0$ und $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \neq r$.

Zu zeigen: $E_G(r) = V(G)$

Sei $v \notin E_G(r)$.

a) v liegt auf einem Kreis.

Dann ist der zu G zugeordnete Graph kein Baum ⚡

b) v liegt nicht auf einem Kreis.

Starte bei v und folge Kanten in umgekehrter Richtung bis Knoten v' mit $g^-(v') = 0$ erreicht ist.

Es gilt $v \in E_G(v')$.

Da $v \notin E_G(r)$ muss $v' \neq r$ gelten ⚡



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

3) \Rightarrow 1):

Laut 3) gilt $E_G(r) = V(G)$ und $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

Sei H der zu G zugeordnete Graph.

Zu zeigen: H ist ein Baum.

Annahme: H enthält einen Kreis K

a) Orientiere alle Kanten von K in die gleiche Richtung.

Liegt r auf dem Kreis, dann $g_G^-(r) = 1$ ⚡

Liegt r nicht auf dem Kreis, dann ist der Kreis von r nicht erreichbar ⚡

denn $g_G^-(v) \leq 1$ für alle v .

b) Orientiere nicht alle Kanten in die gleiche Richtung.

Es gibt einen Knoten mit $g_G^-(v) \geq 2$ ⚡



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

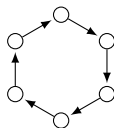
3) \Rightarrow 1):

Laut 3) gilt $E_G(r) = V(G)$ und $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

Sei H der zu G zugeordnete Graph.

Zu zeigen: H ist ein Baum.

Annahme: H enthält einen Kreis K



a) Orientiere alle Kanten von K in die gleiche Richtung.

Liegt r auf dem Kreis, dann $g_G^-(r) = 1$ ⚡

Liegt r nicht auf dem Kreis, dann ist der Kreis von r nicht erreichbar ⚡

denn $g_G^-(v) \leq 1$ für alle v .

b) Orientiere nicht alle Kanten in die gleiche Richtung.

Es gibt einen Knoten mit $g_G^-(v) \geq 2$ ⚡



Gerichtete Bäume – Eigenschaften

Beweisskizze.

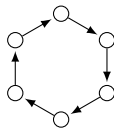
3) \Rightarrow 1):

Laut 3) gilt $E_G(r) = V(G)$ und $g^-(r) = 0$ sowie $g^-(v) \leq 1$ für alle $v \in V(G)$.

Sei H der zu G zugeordnete Graph.

Zu zeigen: H ist ein Baum.

Annahme: H enthält einen Kreis K



a) Orientiere alle Kanten von K in die gleiche Richtung.

Liegt r auf dem Kreis, dann $g_G^-(r) = 1$ ⚡

Liegt r nicht auf dem Kreis, dann ist der Kreis von r nicht erreichbar ⚡

denn $g_G^-(v) \leq 1$ für alle v .

b) Orientiere nicht alle Kanten in die gleiche Richtung.

Es gibt einen Knoten mit $g_G^-(v) \geq 2$ ⚡

